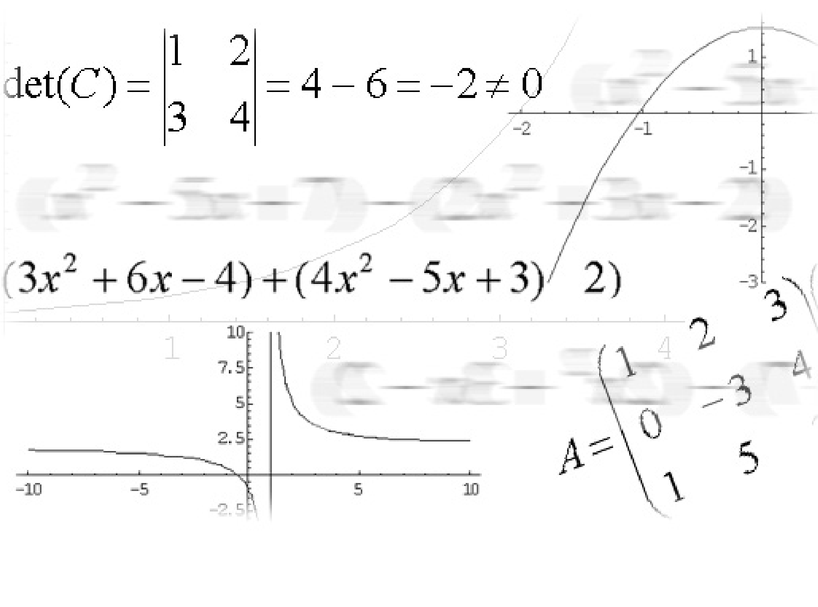
المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الكترونيات وكهرباء

رياضيات تخصصية – ٢

٢٢٢ ريض



مقدمه

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية -٢" لمتدربي قسم" الكترونيات - كهرباء " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول، ورحمة الله المهداة إليها، لتخرج به من الظلمات إلى النور، وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، أما بعد.

فإنمقرر رياضيات تخصصية -2 يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة الإلكترونيات والكهرباء لتعليم الطالب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها الطالب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للطالب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها الطالب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول التمارين بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد الطالب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة لرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن الطالب من:

- الإلمام بفهم قواعد التفاضل وتطبيقاته المختلفة.
- الإلمام بأنواع التكامل وطرق حسابه وتطبيقاته في حساب المساحات.
- فهم المعادلات التفاضلية وطرق حلها وتطبيقاتها على الدوائر الكهربائية.

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعإلى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى أربعة وحدات رئيسة:

تعنى الوحدة الأولى لتعريف الطالب بأساسيات الرياضيات في مفهوم النهاية وطرق حسابها والتفسير الهندسي للمشتقة وحساب التفاضل للدوال المشهورة والدوال المثلثية، الأسية واللوغارتمية ويتوجب على طالب التقنية الإلكترونية و الكهربائية أن يلم بهذه المواضيع. وتهدف هذه الوحدة إلى تحقيق هذا الغرض، وقد قسمت إلى فصلين: فصل النهايات، وفصل المشتقات.

ففي الفصل الأول سندرس المفهوم الرياضي للنهاية وسنتطرق إلى حساب نهاية كثيرات الحدود والقواعد العامة لحساب النهايات وحساب نهاية الدوال الكسرية وكيفية إزالة حالات عدم التعيين في حساب النهايات وحساب نهاية الدوال المعرفة على مجالات مجزئة وبمهوم النهاية يتسنى لنا فهم تعريف المشتقة وهو ما سنتطرق إليه في الفصل الثاني في هذه الوحدة.

في الفصل الثاني فإننا سنتطرق إلى دراسة مفهوم التفاضل والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال الأساسية(كثيرات الحدود -الدوال المثلثية -الدوال الأسية و اللوغارتمية) كما نتطرق في هذا الفصل إلى التفاضل الضمني والمشتقات العليا.

و خصصت الوحدة الثانية لدراسة تطبيقات التفاضل وتهدف هذه الوحدة إلى الربط بين المسائل المختلفة ودراسة حلولها باستعمال مفهوم وقوانين التفاضل، وقد قسمت إلى ثلاثة فصول:

سنتطرق في الفصل الأول إلى تعريف المماس للمنحنى وكيفية حساب ميله ومنه كتابة معادلة المماس للمنحنى كما نتطرق إلى التعريف بالناظم للمنحنى وكيفية حساب ميله ومنه كتابة معادلة الناظم للمنحنى

وفي الفصل الثاني سنعرف القيم الصغرى والعظمى وكيفية استعمال اختبار المشتقة الأولى واختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم الصغرى والعظمى المحلية لمنحنى الدالة ومن المفيد جدا في دراستنا للنماذج الرياضية لمسألة في العلوم التطبيقية النظر إلى بيان الدوال التي تعتمد كنماذج لتلك المسألة ولهذا الغرض سنتطرق في هذا الفصل إلى الرسم البياني لمنحنيات الدوال انطلاقا من تعيين القيم الصغرى والعظمى المحلية ونقاط الانعطاف إن وجدت لهذه الدوال.

أما الفصل الثالث فإنه يعنى بتطبيقات على القيم الصغرى والعظمى المحلية وكيفية استعمالاتها في المسائل التطبيقية المختلفة كما يتطرق إلى المسائل المتعلقة بالنسب المترابطة وطرق دراستها بناءا على قوانين المشتقات.

أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة الطالب بالتكامل المحدود والغير محدود وقدرته على تكامل دوال أساسية باستخدام طرق التكامل المختلفة وتمكنه من حساب المساحات تحت المنحنيات باستخدام التكامل ولهذا الغرض قسمنا هذه الوحدة إلى فصلين:

في الفصل الأول سنشرح معنى التكامل المحدود ونتطرق لقوانين التكامل وكيفية حساب تكامل الدوال المثلثية و الأسية كما نتعرض إلى طريقة التكامل بالتجزئة وطريقة التكامل بالكسور الجزئية.

والفصل الثاني فقد خصص للتعريف بالتكامل المحدود وكيفية تطبيقه لحساب المساحات تحت المنحنيات.

والوحدة الرابعة والأخيرة فقد خصصت لدراسة المعادلات التفاضلية وكما هو واضح ومعهود بأن للمعادلات التفاضلية أهمية قصوى في حل كثير من التطبيقات الإلكترونيات و الكهربائية وحتى في مجالات أخرى و ذلك لحل النماذج الرياضية الناجمة عن تغيرات في مجلات شتى سوى كانت اليكترونيات أو للدراسات الميكانيكية ولذلك خصصت هذه الوحدة لتعريف ودراسة المعادلات

التفاضلية وتطبيقاتها.وقد اتبعنا في ذلك لما تبين لنا من الأهمية بما كان إلى التعريف بالمعادلات التفاضلية عموما حتى تتكون للطالب فكرة عامة عن ذلك وتدرجنا في التخصص لنتعرف عن المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتغيرات والمتجانسة ثم الخطية من الدرجة الأولى.ثم تطرقنا إلى دراسة وحل هذه المعادلات عندما تكون ذات معاملات ثابتة ومن تم أعطينا تطبيقات فيزيائية مباشرة حتى تتبلور وتتضح عند الطالب أهمية هذه المعادلات في التطبيقات الفيزيائية وتعويده عن التطبيقات المباشرة وذلك لنقل الفكرة من حالات ودراسة نظرية إلى تطبيقات ملموسة.ثم اتبعنا نفس المنهج بالنسبة للمعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية لكي تتضح الفكرة أكثر للطالب ويرى انه لكل دراسة رياضية باب واسع في التطبيقات العملية ثم تعويد الطالب عن هذه التطبيقات. ومنه قسمنا هذه الوحدة إلى أربعة فصول:

في الفصل الأول ندرس المعادلات التفاضلية، معناها رتبتها ودرجتها ثم نتطرق لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى القابلة لفصل المتغيرات، المتجانسة والخطية.

أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة التطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ونوضح في هذا الفصل كيفية كتابة المعادلة المعبرة عن شدة التيار الكهربائي والمعادلة المعبرة عن الشحنة الكهربائية في الدوائر الكهربائية ولإيجاد عبارات شدة التيار والشحنة الكهربائية، نطبق طريقة الحلول للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والتي كنا تطرقنا إليها في الفصل الأول من هذه الوحدة.

وفي الفصل الثالث ندرس المعادلات التفاضلية الخطبة من الرتبة الثانية وكيفية حل المعادلات التفاضلية الخطبة من الرتبة الثانية المتجانسة وغير المتجانسة.

أما الفصل الرابع والأخير فقد خصص لدراسة التطبيقات على المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ونفس الطريقة التي تطرقنا إليها في الفصل الثاني نوضح كيفية كتابة المعادلة المعبرة عن شدة التيار الكهربائي والمعادلة المعبرة عن الشحنة الكهربائية في الدوائر الكهربائية ولإيجاد عبارات شدة التيار والشحنة الكهربائية، نطبق طريقة الحلول للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والتي كنا تطرقنا إليها في الفصل الثالث من هذه الوحدة

والله الموفق

المملكـة العربيــة السـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية – ٢

النهايات و التفاضل

النهايات و التفاضل

١

الجدارة: معرفة مفهوم النهايات والتفاضل وكيفية تفاضل الدوال المشهورة

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- المفهوم الرياضي للنهاية وكيفية حساب النهايات
- التفسير الهندسي للمشتقة
- تفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود -الدوال المثلثية، الأسية واللوغارتمية) والتفاضل الضمني.

الوقت المتوقع للتدريب: ثلاث ساعات للفصل الأول و تسع ساعات للفصل الثاني، بحيث يكون الوقت الكلي اثنتي عشر ساعة.

الفصل الأول : النهايات

نهاية المتوالية: إذا وقعت النقط المتتالية التي تعطي بحدود المتوالية.

$$1,3/2,5/3,7/4,9/5,...,2-1/n,... \qquad (١)$$

على خط الأعداد الحقيقية فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث إننا نجد نقطا من المتوالية بعدها عن 2 أقل من أي عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيرا.

فمثلا النقطة 2001/1001 وجميع النقط التي تليها تكون على بعد أقل من 1/1000 عن 2 والنقطة 20000001/10000001 وجميع النقط التي تليها على بعد أقل من 1/1000000 عن 2 وهكذا. نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتوالية هي العدد 2.

وإذا كان x متغيرا، مداه المتوالية (١)، فإننا نقول إن x تقرب من 2 كنهاية لها أو أن x تؤول إلى 2 كنهاية لها وتكتب $x \to 2$.

إن المتوالية (١) لا تحتوي على نهايتها وهي العدد 2 كأحد حدودها أما المتوالية $1,1/2,1,3/4,\ 1,5/6,1,...$ فإنها تؤول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردى يساوي 1 ولذا نرى أنه يمكن المتوالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذالك.

غير أننا سنفهم فيها يلي من أن $x \to a$ تستلزم أن $x \neq a$ أي أنه ينبغي أن ندرك أن أي متوالية مفروضة اختيارية لا تحتوي نهايتها كأحد حدودها.

نهاية الدالة: لنفرض أن $x \to 2$ على المتوالية (1)

عندئذ $f(x) = x^2 \to 4$ على المتوالية $1,9/4,25/9,49/16,...,(2-1/n)^2,...$

لنجعل الآن $x \to 2$ على المتوالية

$$2.1,2.01,2.001,2.0001,...,2+1/10^n,... \qquad (٢)$$

فعندئذ $x^2 \to 4$ على المتوالية $4.41,4.0401,4.004001,....,(2+1/10^n)^2,...$ ويبدو من المعقول أن نقبل أن x^2 تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب x من 2 كنهاية لها..ونقول أن نهاية x^2 عندما تقترب x من 2، تساوي 4 و تكتب $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

النهايتان اليسرى واليمنى:

إن قيمة x عندما $x \to 2$ على المتوالية (١)، هي باستمرار أصغر من ٢ وعلى هذا فإننا نقول x تقترب من ٢ من اليسار وتكتب $x \to 2^-$. وبالمثل قيمة x عندما $x \to 2$ على المتوالية (٢) هي باستمرار أكبر من ٢. ونقول في مثل هذه الحالة أن x تقترب من ٢ من اليمين وتكتب $x \to 2^+$. ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim_{x\to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوي كل من نهاية اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ونهاية اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$ على أن وجود نهاية اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية اليسار (اليمين).

مثال ١:

إن مجال التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3 \le x \le 3$ فإذا كان a أي عدد في الفترة المفتوحة $-3 < x < 3$ فإن $\lim_{x\to a}\sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوي $\sqrt{9-a^2}$ لنعتبر الآن $a=3$ ولنجعل x تقترب من ٣ من اليسار أولا فنجد أن $\lim_{x\to -3^-}\sqrt{9-x^2}=0$ أما إذا جعلنا x بعد ذلك تقترب من ٣ من اليمين فإننا نجد أن $\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة لأن $\sqrt{9-x^2}$ يكون تخيليا عندما $x>3$ وهكذا نجد أن $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

بالمثل نجد أن $\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}$ موجودة و مساوية للصفر ولكن $\lim_{x\to -3^-}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة وبالتالي $\lim_{x\to -3}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

تعريف

لتكن $\mathbf{A}$ مجموعة جزئية (نطاق أو اجتماع عدة نطاقات (مجالات)) من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$ و f دالة من A في $\Re$

نقول أن الدالة $f: A \to \Re$ تنتهي إلى $b \in A$ عندما تنتهي x إلى النقطة $x_0 \in A$ ونرمز لذلك بـ $\lim_{x\to x_0} f(x)=b$ أو $f(x)\to b$ عندما $x \to x_0$ إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل عدد حقيقي موجب ε يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب آخر δ=δ(ε) بحيث يكون

$$x \in A \text{ و } |x-x_0| \prec \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

يعني أن $f(x)$ تقترب من $b \in A$ عندما تقترب x من x_0

والبحث عن نهاية دالة هو البحث عن قيمة تقترب إليها الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من عدد x_0

حساب نهاية الدالة:

لحساب نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق إليها في ما بعد

مثال ٢: نفرض أن $f(x) = x^2$ ، نبحث عن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 4 عندما تقترب x إلى العدد 2

مثال ٣: أوجد النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}(2x^3 + 5x + 2) \qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2 + x}{2x}\right)^5 \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2 + 2x}{x+1} \qquad 4)\ \lim_{x\to 3} 5$$

الأجوبة:

$$1)\ \lim_{x\to 0}(2x^3 + 5x + 2) = 2(0)^3 + 5(0) + 2 = 2$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2 + x}{2x}\right)^5 = \left(\frac{4(1)^2 + 1}{2(1)}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{16}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2 + 2x}{x+1} = \frac{3(1)^2 + 2(1)}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to 3} 7 = 7$$

نظريات في النهايات

1) نهاية مجموع دالتين

لتكن الدالة $F(x) = f(x) + g(x)$ حيث $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ٤:

$$\lim_{x\to -2}(6x^3 + 5x^2) = \lim_{x\to -2} 6x^3 + \lim_{x\to -2} 3x^2 = \lim_{x\to -2}(6x^3 + 5x^2) = \lim_{x\to -2} 6x^3 + \lim_{x\to -2} 3x^2$$

$$= 6(-2)^3 + 3(-2)^2 = -48 + 12 = -36$$

2) نهاية فارق دالتين

لتكن الدالة $F(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ٥ : $\lim\limits_{x\to1}(2x^4-x^3)=\lim\limits_{x\to1}2x^4-\lim\limits_{x\to1}x^3=2(1)^4-(1)^3=1$

وعموما إذا كانت الدالة

$$F(x)=f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm....\pm f_{n-1}(x)\pm f_n(x)$$

حيث $f_1(x), f_2(x), f_3(x),...., f_{n-1}(x), f_n(x)$ عبارة عن دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f_1(x)\pm\lim_{x\to a}f_2(x)\pm\lim_{x\to a}f_3(x)\pm....\pm\lim_{x\to a}f_{n-1}(x)\pm\lim_{x\to a}f_n(x)$$

مثال ٦ : لتكن الدالة $F(x)=x^4-2x^3+3x^2+x$

$$\lim_{x\to1}F(x)=\lim_{x\to1}(x^4-2x^3+3x^2+x)=\lim_{x\to1}x^4-\lim_{x\to1}2x^3+\lim_{x\to1}3x^2+\lim_{x\to1}x$$

$$=(1)^4-2(1)^3+3(1)^2+1=3$$

٣) نهاية جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)=f(x)g(x)$ حيث $f(x),g(x)$ دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$$

مثال ٧ : لتكن $F(x)=(-2x^3-1)(5x^2+1)$

فإن $\lim\limits_{x\to-1}F(x)=\lim\limits_{x\to-1}(-2x^3-1)(5x^2+1)=\lim\limits_{x\to-1}(-2x^3-1)\times\lim\limits_{x\to-1}(5x^2+1)$

$$=\left(-2(-1)^3-1\right)\left(5(-1)^2+1\right)=6$$

وعموما إذا كان $F(x)$ عبارة عن جداء عدة دوال $F(x)=f_1(x)\times f_2(x)....\times f_n(x)$

فإن $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\times\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\times....\times\lim\limits_{x\to a}f_n(x)$

٤) نهاية قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x),g(x)$ دالتان في x و $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq0$ فإن

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

مثال ٨: لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{2x+6}{5x^2-1}$ فإن

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x+6}{5x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(2x+6)}{\lim\limits_{x\to0}(5x-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

مثال٩: إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\neq2\\ 0 & ,x=2\end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{x\to2}f(x)$

الحل: نلاحظ هنا أنه إذا كان $x \to 2$ هذا يعني أن $x \neq 2$ إذن $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

مثال ١٠: أوجد $\lim_{x\to 3} f(x)$ إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & , x > 3 \end{cases}$

الحل: عندما تقترب x إلى العدد ٣ من اليسار فإنعبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x) = x^2 - 5$ وبالتالي

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 4$$

عندما تقترب x إلى العدد ٣ من اليمين فإنعبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x) = \sqrt{x+13}$ وبالتالي

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (\sqrt{x+13}) = \sqrt{3+13} = 4$$

إذن النهايتين من اليمين ومن اليسار متساويتين ومنه فإن $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$

مثال ١١: أوجد $\lim_{t\to 0} g(t)$ إذا كانت $g(t) = \begin{cases} t^2 & , \ t \ge 0 \\ t-2, & t < 0 \end{cases}$

الحل: عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليسار فإنعبارة الدالة $g(t)$ هي $g(t) = t - 2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-} (t - 2) = 0 - 2 = -2$$

عندما تقترب t إلى العدد ٠ من اليمين فإنعبارة الدالة $g(t)$ هي $g(t) = t^2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} (t^2) = 0^2 = 0$$

إذن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار ومنه فليس للدالة نهاية عند هذه النقطة.

حالات عدم التعيين

$$1)\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \times 0\ ,\ 2)\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty - \infty\ ,\ 3)\ \lim_{x\to a} f(x) = \frac{\infty}{\infty},\ \ 4)\ \lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$$

ففي هذه الحالات تكون النهاية غير معينة وهناك طرق لإزالة عدم التعيين

أولا: عدم التعيين $\frac{0}{0}$: ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالاختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع أو باستعمال طرق أخرى.

مثال ١٢: احسبالنهاية التالية $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{0}{0}$

يجب إزالة عدم التعيين

لدينا $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)\quad , x\neq 3$

إذن $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$

مثال ١٣: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$

مثال ١٤: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=\frac{0}{0}$

من أجل $x\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

مثال ١٥: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\frac{0}{0}$

فمن أجل $x\neq -3$ ، $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$

مثال ١٦: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\frac{0}{0}$

لدينا $\frac{2x^2-2x-12}{x^2-3}=\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)}=2x+4$ من أجل $x\neq 3$

إذن $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}2x+4=10$

مثال ١٧: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$

الحل: عدم التعيين $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{-8+24-24+8}{-2+2}=\frac{0}{0}$

باستخدام القسمة المطولة نحصل $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\frac{(x^2+4x+4)(x+2)}{(x+2)}$

ومنه فمن أجل $x \neq -2$ ، $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2} = x^2+4x+4$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} x^2+4x+4 = 4-8+4 = 0$

نظرية ١: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ حيث α عدد موجب

مثال ١٨: لدينا $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^5} = 0$

نظرية 2: $\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \infty$

مثال ١٩: $\lim_{x\to\infty}(4x^2+2x+5) = \infty$

ثانيا: عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$: لإزالة عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما يؤول المتغير x إلى ∞.، نقسم البسط والمقام على المتغير حاملا أكبر أس في المقام

مثال ٢٠: احسبالنهاية التالية: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$$

مثال ٢١: احسبالنهاية التالية: $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^3 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x/x^3+5/x^3}{x^3/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2+5/x^3}{1} = \frac{0+0}{1} = 0$$

مثال ٢٢: احسبالنهاية التالية: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2}$

الحل: عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5/x^2+3/x^2}{x^2/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3/x^2}{1} = \infty$$

ثالثا: عدم التعيين $0\times\infty$ **:** لإزالة عدم التعيين $0\times\infty$. نطبق طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالاختصار والقيام بعملية الضرب و القسمة في حالة وجودهما

مثال ٢٣: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)$

الحل: $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=0\times\infty$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{2}{x-1}\right)=3+\frac{2}{0-1}=1$$

رابعا: نستعمل نفس الطريقة السابقة لإزالة عدم التعين ($\infty-\infty$)

مثال ٢٤: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

الحل: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\infty-\infty$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(3-\frac{1}{(x+1)}\right)=\infty\times\frac{5}{2}=\infty$$

نظرية ٣: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ حيث $a\in\Re$

وبصفة عامة إذا كانت لدينا $f(x)$ و $g(x)$ دالتان مستمرتان على I حيت $g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g^{/}(x)\neq 0$

فإن: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

يمكن تطبيق ذلك على الحالة الخاصة حيث $f(x)=x^n-a^n$ و $g(x)=x-a$

مثال ٢٥: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}$

الحل: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=3\times 2^2=12$

مثال ٢٦: احسبالنهاية التالية: $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$

الحل: $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}=3(-4)^{3-1}=48$

نهايات بعض الدوال المشهورة

$$1)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1\ ,\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718\ ,$$

$$3)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0\ ,\qquad 4)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\qquad 5)\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1\ .$$

تمارين محلولة: احسبالنهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-2x}{8-4x}$	6) $\lim\limits_{h\to0}h\left(1+\frac{1}{h}\right)$	11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x}{2x^3-5}$
2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}$	7) $\lim\limits_{h\to2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$	12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x^4}{x-1}$
3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$	8) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}$	13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}$
4) $\lim\limits_{u\to-1}\frac{u^2+2u+1}{u+1}$	9) $\lim\limits_{x\to0}\left(4x+\frac{1}{x}\right)$	14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}$
5) $\lim\limits_{y\to1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}$	10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8}$	15) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-2x}{8-4x}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to2}\frac{4-2x}{8-4x}=\lim_{x\to2}\frac{2(2-x)}{4(2-x)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(2x^2+4)}{x^2(x^2+3)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+4}{x^2+3}=\frac{4}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$$

4) $\lim\limits_{u\to-1}\frac{u^2+2u+1}{u+1}=\frac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{u\to -1}\frac{u^2+2u+1}{u+1}=\lim_{u\to -1}\frac{(u+1)^2}{u+1}=\lim_{u\to -1}(u+1)=-1+1=0$$

5) $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\sqrt[3]{y}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{y}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2+\sqrt[3]{y}+1\right]}{\sqrt[3]{y}-1}=\lim_{y\to 1}\left[\left(\sqrt[3]{y}\right)^2+\sqrt[3]{y}+1\right]=1+1+1=3$$

6) $\lim\limits_{h\to 0}h\left(1+\dfrac{1}{h}\right)=0\times(1+\infty)=0\times\infty$ عدم التعيين

$$\lim_{h\to 0}h\left(1+\frac{1}{h}\right)=\lim_{h\to 0}h\left(\frac{h+1}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$$

7) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2-2x+1\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{(x-1)}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}=\dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty+0=\infty$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-x}{2x^3-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x^4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

$$14)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}\big/|x|}{(3x-6)\big/|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}\big/\sqrt{x^2}}{(3x-6)/x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2/x^2}}{3-6/x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+2/x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3-6/x)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2/x^2)}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3-6/x)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}1+2\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3-6\lim\limits_{x\to+\infty}1/x}=\frac{\sqrt{1+2(0)}}{3-6(0)}=\frac{1}{3}$$

$$15)\ \lim_{x\to4^+}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}=-\infty$$

تمارين إضافية : احسبالنهايات التالية :

$1)\lim\limits_{x\to5}\left(3x^2-2x+1\right)$	$7)\lim\limits_{x\to1} f(x), where f(x)=\begin{cases}-1, & x\neq-1\\ -3, & x=-1\end{cases}$	$13)\lim\limits_{y\to x}\frac{2-y}{\sqrt{7+6y^2}}$
$2)\lim\limits_{x\to1.6}\frac{2x^2-5x+3}{x-4}$	$8)\lim\limits_{x\to1}(x-1)\sqrt{x-3}$	$14)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-5/x}{4+5/x^2}$
$3)\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2}{x-2}$	$9)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+2/x}$	$15)\lim\limits_{s\to+x}\sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}$
$4)\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$	$10)\lim\limits_{x\to3} f(x)\ where\ f(x)=\begin{cases}x-1, x\le3\\ 3x-7, x>3\end{cases}$	$16)\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x4}{x^2+x-6}$
$5)\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$	$11)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-7}{x^2-4}$	$17)\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x^3-3x-1}$
$6)\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+1)^2-1}{x+2}$	$12)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-10}{3x^3-1}$	$18)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-7}{4x^2-2x+1}$

الفصل الثاني : الاشتقاق – التفاضل

تعريف ١

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشبقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشبقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشبقاق عند كل نقطة x_0 من I

وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

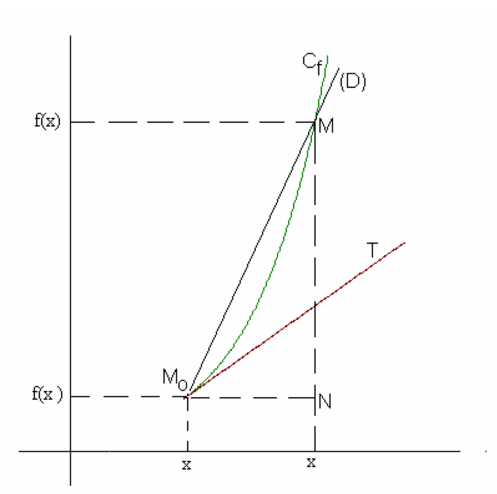
ملاحظة١ : f قابلة للاشبقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢ : $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$



$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{M_0 N}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

تعريف المشتقة

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشبقاق على المجال I من $\Re$ فإن المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } \frac{df}{dx} \text{ أو } \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \text{ أو } f'(x) \text{ أو } y'$$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = x^2 + 2$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2 - \left(x^2 + 2\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right) - \left(x^2 + 2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = 1 - x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - (x+\Delta x)^2 - (1 - x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -2x - \Delta x = -2x$$

مثال ٣: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $w = 1.2 - 0.3m^2$

$$w' = \frac{dw}{dm} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{f(m+\Delta m) - f(m)}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\left(1.2 - 0.3(m+\Delta m)^2\right) - \left(1.2 - 0.3m^2\right)}{\Delta m}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{1.2 - 0.3m^2 - 0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2 - 1.2 + 0.3m^2}{\Delta m}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{-0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} -0.6m - 0.3\Delta m = -0.6m$$

مثال ٤: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $s = 2 + 3t^2$

الحل:

$$s' = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3(t+\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 6t + 3\Delta t = 6t$$

مثال ٥: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = 2x + 5$

الحل:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+5-(2x+5)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x+5-2x-5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2 = 2$$

مثال ٦: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{3x-7}$

الحل:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)-7-(3x-7)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x-7-3x+7}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x+3\Delta x-7}+\sqrt{3x-7}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

قوانين المشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فإن مشتقة $y = x$ تساوي العدد ١

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 0$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل: لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذن $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤ : مشتق مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشبقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتق جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتان قابلتان للاشبقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣: لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن $F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$

القانون ٦ : مشتق قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتان للاشبقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x) \neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن

$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x \neq \frac{1}{2}$

الحل: لدينا $f_1(x) = 8x^7 \Rightarrow f_1'(x) = 7 \times 8x^{7-1} = 56x^6$ و $f_2(x) = 2x-1 \Rightarrow f_2'(x) = 2$

إذن
$$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 2 \times 8x^7}{(2x-1)^2} = \frac{56x^6(2x-1) - 16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{112x^7 - 56x^6 - 16x^7}{(2x-1)^2} = \frac{96x^7 - 56x^6}{(2x-1)^2} = \frac{2x^6(48x-28)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتق الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$

إذا كانت $F(x)=(f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

أي أن $F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{dF(x)}{df(x)}\dfrac{df(x)}{dx}=n(f(x))^{n-1}f'(x)$

مثال ١٥: أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

الحل: لدينا $f(x)=(2x^2+3x-2)\Rightarrow f'(x)=4x+3$

إذن $y'=F'(x)=2\times 4(2x^2+3x-2)^{2-1}(4x+3)=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$

القانون ٨: مشتق مقلوب دالة

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق و $g(x)\neq 0$ عند كل نقاط I من $\Re$ و $y=f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

فإن $y'=f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال ١٦: لتكن $g(x)=(2x-1)$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$ و $y=f(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{(2x-1)}$

فإن $y'(x)=f'(x)=\dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}=\dfrac{-2}{(2x-1)^2}$

القانون ٩ : مشتق الدوال المركبة

لتكن الدالة $Z=f(y)$ حيث $y=g(x)$ أي أن $Z=f(g(x))$ فإن

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dy}\frac{dy}{dx}$$

مثال ١٧: لتكن الدالة $Z=y^3+2y+4$ و $y=5x^2$ أي أن

$$Z=(5x^2)^3+2(5x^2)+4$$

فإن $\dfrac{dZ}{dx}=\dfrac{dZ}{dy}\dfrac{dy}{dx}=(3y^2+2)(10x)=10x(3y^2+2)$

نعوض y بـ $5x^2$ فيكون لدينا

$$\frac{dZ}{dx}=10x\left[3(5x^2)^2+2\right]=10x(75x^4+2)$$

تمارين

تمرين1 : اشتق الدوال الآتية

1) $y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}$

2) $y=\dfrac{x^3-1}{x^4+1}$

3) $y=\left(\dfrac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$

4) $y=\left(x^3-2x^2\right)^4$

5) $y=\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}$

6) $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{5x^{-3}}{2}$

7) $y=\dfrac{5}{x^2-7x+3}$

8) $y=\left(4x^2-3\right)^2(x+5)$

9) $y=-\dfrac{7}{x^9}$

10) $y=\sqrt{\dfrac{4}{x^3}}-\sqrt{3x}$

11) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$

12) $f(t)=\sqrt{\dfrac{3t^2-4}{2t+5}}$

الحل:

1) $y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}=\left(x^{13}+13+x^{-13}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$y'=\frac{1}{5}\left(13x^{12}-13x^{-14}\right)\left(x^{13}+13+x^{-13}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

2) $y=\dfrac{x^3-1}{x^4+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3x^2\left(x^4+1\right)-4x^3\left(x^3-1\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$

3) $y=\left(\dfrac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$

$$y'=2\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)\left[\frac{\left(x^2-3x\right)-(2x-3)(x+2)}{\left(x^2-3x\right)^2}\right]$$

4) $y=\left(x^3-2x^2\right)^4\quad\Rightarrow y'=4\left(x^3-2x^2\right)^3\left(3x^2-4x\right)$

5) $y=\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}\quad\Rightarrow y=\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}}$

$$y'=\frac{4}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}-1}(2x)=\frac{8}{3}x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

6) $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{5x^{-3}}{2}\ \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{5}{2}x^{-4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{15}{2}x^{-4}$

7) $y=\dfrac{5}{x^2-7x+3}\ \Rightarrow y'=\dfrac{-5(2x-7)}{\left(x^2-7x+3\right)^2}$

8) $y=\left(4x^2-3\right)^2(x+5)$

$$y' = 2\times 8x\left(4x^2-3\right)(x+5)+\left(4x^2-3\right)^2 = 16x\left(4x^2-3\right)(x+5)+\left(4x^2-3\right)^2$$

9) $y=-\dfrac{7}{x^9} \Rightarrow y' = -\dfrac{-7\times 9x^8}{(x^9)^2} = \dfrac{63x^8}{x^{18}} = \dfrac{63}{x^{10}}$

10) $y=\sqrt{\dfrac{4}{x^3}}-\sqrt{3x} \Rightarrow y=\left(\dfrac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}-(3x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4\times 3x^2}{\left(x^3\right)^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{6}{x^4}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{3}{x^4}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2x}\sqrt{3x}$$

11) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$f'(x) = \frac{4x\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{\left[\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2} = \frac{4x-\frac{2}{3}x\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-1}}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2x\left[2-\frac{1}{3}\left(2x^2-3\right)\left(x^2+7\right)^{-1}\right]}{\left(x^2+7\right)^{\frac{1}{3}}}$$

12) $f(t)=\sqrt{\dfrac{3t^2-4}{2t+5}}=\left(\dfrac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{6t(2t+5)-2\left(3t^2-4\right)}{(2t+5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}}\,\frac{6t^2+30t+8}{(2t+5)^2}$$

تمرين ٢ : أوجد مشتقة $f(t)$ بالنسبة لـ t إذا كانت

$a)\quad f(t)=4t^3+t^{-3}+t$

$b)\quad f(t)=\left(t^2-t\right)^3$

$c)\quad f(t)=(2t-3)(2-3t)$

الحل:

$a)\quad f(t)=4t^3+t^{-3}+t$

$$f'(t)=3\times 4t^2-3t^{-4}+1=8t^2-3t^{-4}+1$$

$b)\quad f(t)=\left(t^2-t\right)^3$

$f'(t)=3\left(t^2-t\right)^2(2t-1)$

$c)\quad f(t)=(2t-3)(2-3t)$

$f'(t)=2(2-3t)-3(2t-3)=4-6t-6t+9=-12t+13$

تمرين ٣: إذا كان $y=\frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r=1+2t$ أوجد $\frac{dy}{dt}$

الحل: لدينا $y=\frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r=1+2t$ وبالتالي فإن $y=\frac{4}{3}\pi(1+2t)^2$ ومنه فإن

$$\frac{dy}{dt}=2\times\frac{4}{3}\pi(1+2t)(2)=4\times\frac{4}{3}\pi(1+2t)=\frac{16}{3}\pi(1+2t)$$

تمرين ٤: احسبميل المماس للمنحنى $y=2+x^2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: ميل المماس عند النقطة $(-1,3)$ هو مشتق الدالة عند هذه النقطة

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,3)}=\left.2x\right|_{(-1,3)}=2(-1)=-2$$

تمرين٥: لتكن $s=f(t)=2t^3+5\ (m)$ هي معادلة المسافة بدلالة الزمن. أوجد السرعة الآنية عند اللحظة $t=5\ Seconds$.

الحل: السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة s بالنسبة للزمن t وتعطي بالمشتقة $\frac{dy}{dt}=6t$

السرعة الآنية عند اللحظة $t=5\ Seconds$ هي:

$$\left(t=5 \text{ عند النقطة } \frac{dy}{dt}\right)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=5}=6\times5=30\ m/s$$

تمارين إضافية

١) احسبباستعمال التعريف مشتقة الدوال التالية:

$1)\ y=x^2+4x-3$	$3)\ y=2\sqrt{t+3}$	$5)\ y=x^3-1$	$7)\ y=5-+3t+2t^2$
$2)\ y=\sqrt{x-5}$	$4)\ y=-x^2+5x-7$	$6)\ y=2x-7$	$8)\ y=3t+7$

2) أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

$1)\ y=(2x^3-7)(3x^2)$	$6)\ y=\frac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$	$11)\ y=\left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$	$16)\ y=\frac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
$2)\ y=\frac{2x^2-5}{3x}$	$7)\ y=\frac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$	$12)\ y=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$	$17)\ y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$

$3)\ y=\frac{2}{3x^2-7x+4}$	$8)\ y=(2x^4-1.9)^3$	$13)\ y=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$	$18)\ y=2x^{-3}+7x^{-5}$
$4)\ y=\frac{5}{4x^3-3x^2}$	$9)\ y=\frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$	$14)\ y=x^2\sqrt{x-1}$	$19)\ y=(4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
$5)\ y=\frac{1}{x+2}-x$	$10)\ y=(2x^3-4x+7)^{-2}$	$15)\ y=\frac{1.9}{(2x+4)^3}$	$20)\ y=\sqrt{\frac{x-2}{x^2+5}}$

٣) لتكن s معادلة المسافة معطاة بدلالة الزمن t أوجد السرعة الآنية عند اللحظة المعطاة

$1)\ s=(1.4t^2)(3t+2), t=2s$

$2)\ s=\frac{3.8t^3}{2t+7}, t=2s$

٤) أوجد ميل المماس للمنحنيات المعطاة عند النقاط المحددة

$1)\ y=(3x^2-4x+1)(5x^2+2), x=3$

$2)\ y=\frac{(2x-1)(4x^3)}{5x+6}, x=-1$

$3)\ y=x^2\sqrt{x-1},\ x=2$

$4)\ y=\frac{2x^3}{(3x-5)(x+2)},\ x=-2$

اشتقاق الدوال المثلثية

قواعد اشتقاق الدوال المثلثية:

١) إذا كانت $y = \sin x$

فإن $y' = \dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

٢) إذا كانت $y = \cos x$ فإن $y' = \dfrac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

٣) لتكن الدالة $y = \sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق قانون مشتق الدوال المركبة فنحصل على

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$$

٤) لتكن الدالة $y = \cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق قانون مشتق الدوال المركبة فنحصل على

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال1: لتكن الدالة $y = \sin(2x^3 - 3)$

فإن $y' = 3 \times 2x^2 \cos(2x^3 - 3) = 6x^2 \cos(2x^3 - 3)$

مثال ٢: أوجد مشتقة الدالة $y = \cos(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

الحل: لدينا $u = 2\theta^3 - 3\theta^{-2} \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = 6\theta^2 + 6\theta^{-3}$

إذن $y' = -(6\theta^2 + 6\theta^{-3})\sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

٥) حساب مشتق الدالة $y = \tan x$

لدينا $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

نطبق قانون مشتق قسمة دالتين

$$f_1(x) = \sin x \Rightarrow f_1'(x) = \cos x,\;\; f_2(x) = \cos x \Rightarrow f_2'(x) = -\sin x$$

$$y' = \frac{d(\tan(x))}{dx} = \frac{\cos x.\cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

إذن $y' = \dfrac{d(\tan(x))}{dx} = \sec^2 x$

٦) لنعتبر الدالة المركبة $y = \tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق قانون مشتق الدالة المركبة فنحصل على

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

إذن $y' = \frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

مثال ٣: إذا كانت $y = \tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: لدينا $u = x^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x^{-3}$

إذن $y' = \frac{d(\tan u)}{dx} = \frac{du}{dx}\sec^2 u = -2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٧) حساب مشتق الدالة $y = \cot x$

لدينا $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

نطبق مبدأ مشتق قسمة دالتين حيث

$$f_1(x) = \cos x \to f_1'(x) = -\sin x$$

$$f_2(x) = \sin x \to f_2'(x) = \cos x$$

$$y' = \frac{d(\cot(x))}{dx} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

إذن $y' = \frac{d(\cot(x))}{dx} = -\csc^2 x$

٨) لنعتبر الدالة المركبة $y = \cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق مبدأ مشتق الدالة المركبة فنحصل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

إذن $y' = \frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

مثال ٤: احسبمشتقة الدالة $y = \cot 3x$

الحل: لدينا $u = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

ومنه فإن $y' = \frac{d(\cot u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\csc^2 u = -3\csc^2 3x$

٩) حساب مشتق الدالة $y = \sec x$

لدينا $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

نطبق قانون مشتق مقلوب دالة

$$y' = \frac{d\left(\sec(x)\right)}{dx} = \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

إذن $y' = \frac{d\left(\sec(x)\right)}{dx} = \tan x \sec x$

١٠) لنعتبر الدالة المركبة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق مبدأ مشتق الدالة المركبة فنحصل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \ \sec u$$

إذن $y' = \frac{d(\sec u)}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \ \sec u$

مثال ٥ : احسبمشتقة الدالة $y = \sec x\theta^2$

الحل: لدينا $u = \theta^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $y' = \frac{d(\csc u)}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\tan u \ \sec u = 2\theta \tan \theta^2 \sec \theta^2$

١١) حساب مشتق الدالة $y = \csc x$

لدينا $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

نطبق قانون مشتق مقلوب دالة

$$y' = \frac{d\left(\csc(x)\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x} = -\cot x \csc x$$

إذن $y' = \frac{d\left(\csc(x)\right)}{dx} = -\cot x \csc x$

١٢) لنعتبر الدالة المركبة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

نطبق مبدأ مشتق الدالة المركبة فنحصل

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u$$

إذن $y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \ \csc u$

مثال ٦: احسبمشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل: لدينا $u = x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \ \csc u = -3x^2 \cot x^3 \csc x^3$$

مثال ٧: احسبمشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل: لدينا $u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 10x^4$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \ \csc u = -10x^4 \cot(2x^5 - 3)\csc(2x^5 - 3)$$

تمارين محلولة: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin^5 3x^2$	5) $y = \csc^3(-7x^4)$	9) $y = \dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$	13) $y = \sin(\cos 2x)$
2) $y = x \tan \dfrac{1}{x}$	6) $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$	10) $y = \sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$	14) $y = \sqrt{1 + \sin x}$
3) $y = \sqrt{x}\cos 2x$	7) $y = \tan^2(x^2 + 1)$	11) $y = \dfrac{1}{x^2 \sin^3 x}$	15) $y = x\cot(-4x)$
4) $y = \sqrt{\csc x^3}$	8) $y = (x^4 - \cot x)^3$	12) $y = (\sin x - \cos x)^2$	16) $y = x \ \csc x$

الحل:

1) $y = \sin^5 3x^2$

$$y' = 5\sin^4 3x^2 \ (6x)\cos 3x^2 = 30x\sin^4 3x^2 \ \cos 3x^2$$

2) $y = x\tan\dfrac{1}{x}$

$$y' = \tan\frac{1}{x} - x\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x} = \tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$$

3) $y = \sqrt{x}\cos 2x$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos 2x - 2\sqrt{x}\sin 2x$$

4) $y = \sqrt{\csc x^3} = (\csc x^3)^{\frac{1}{2}} = \csc^{\frac{1}{2}} x^3$

$$y' = \frac{1}{2}(\csc x^3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(-\cot x^3 \csc x^3) = -\frac{3}{2}x^2 \csc^{-\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3 \csc x^3 = -\frac{3}{2}x^2 \csc^{\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3$$

$5)\, y=\csc^3(-7x^4)$

$y'=3\left(-7\times 4x^3\right)\csc^2\left(-7x^4\right)\left[-\cot\left(-7x^4\right)\csc\left(-7x^4\right)\right]=84x^3\csc^3\left(-7x^4\right)\cot\left(-7x^4\right)$

$6)\, y=\sqrt{1+\cos^2 x}\Rightarrow y=(1+\cos^2 x)^{1/2}$

$y'=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\cos x\sin x)=-(1+\cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}\cos x\sin x.$

$7)\;\; y=\tan^2(x^2+1)$

$y'=2(2x)\tan(x^2+1)\sec^2(x^2+1)=4x\tan(x^2+1)\sec^2(x^2+1)$

$8)\, y=(x^4-\cot x)^3$

$y'=3\left(x^4-\cot x\right)^2\left(4x^3+\csc^2 x\right)$

$9)\;\; y=\frac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$

$$y'=\frac{2x\cos x^2\cos^2 x^2+4x\sin x^2\cos x^2\sin x^2}{(\cos^2 x^2)^2}=\frac{2x\cos^3 x^2+4x\sin^2 x^2\cos x^2}{\cos^4 x^2}$$

$$=\frac{2x}{\cos x^2}\left(1+2\tan^2 x^2\right)=2x\sec x^2\left(1+2\tan^2 x^2\right)$$

ويمكن حلها كما يلي

$$y=\frac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}=\tan x^2\sec x^2$$

$$\Rightarrow y'=2x\sec^2 x^2\sec x^2+2x\tan x^2\sec x^2\tan x^2=2x\sec^3 x^2+2x\tan^2 x^2\sec x^2$$

$$=2x\sec x^2\left(\sec^2 x^2+\tan^2 x^2\right)=2x\sec x^2\left(1+2\tan^2 x^2\right)$$

$10)\;\; y=\sec\left(2x+1\right)^{\frac{5}{2}}$

$$y'=\frac{5}{2}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}(2)\tan\left(2x+1\right)^{\frac{5}{2}}\sec\left(2x+1\right)^{\frac{5}{2}}=5\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}\tan\left(2x+1\right)^{\frac{5}{2}}\sec\left(2x+1\right)^{\frac{5}{2}}$$

$11)\;\; y=\frac{1}{x^2\sin^3 x}$

$$y'=-\frac{2x\sin^3 x+3x^2\sin^2 x\cos x}{\left(x^2\sin^3 x\right)^2}=-\frac{2\sin x+3x\cos x}{x^3\sin^4 x}$$

$12)\;\; y=\left(\sin x-\cos x\right)^2$

$y'=2(\sin x-\cos x)\,\left(\cos x+\sin x\right)=2\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=2\left(1-2\cos^2 x\right)$

13) $y = \sin(\cos 2x)$

$y' = -2\sin 2x \cos(\cos 2x)$

14) $y = \sqrt{1 + \sin x}$

$\Rightarrow\ y = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x$

15) $y = x\cot(-4x)$

$y' = \cot(-4x) + 4x\csc^2(-4x)$

16) $y = x\ \csc x$

$y' = \csc x - x\cot x \csc x$

تمارين إضافية : احسبمشتقة الدوال التالية:

1) $f(x) = \sin^3 x$	7) $y = (x^3 - 7x + 4)\sin(x^2 - 1)$	13) $y = \sqrt[3]{2 + \tan(x^2)}$
2) $f(x) = \tan\left(4x^2\right).$	8 $y = \tan\left[(2x-1)^{\frac{-1}{3}}\right]$	14) $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 7}\sec x$
3) $f(x) = \sec\left(2x^3\right).$	9) $y = \cos^2 x\tan(\frac{1}{x} - x^3)$	15) $f(x) = \left[x + \csc\left(x^3 + 3\right)\right]^{-3}$
4) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}\csc x$	10) $f(x) = 2\sec^2\left(x^7\right)$	16) $f(x) = 3\cot^4 x$
5) $y = \sin x\cot(\frac{1}{x} - x^2)$	11) $y = \sqrt[3]{2 + \sin(x^3)}$	17) $f(x) = \csc\left(4x^2\right) + 2\sin x^2.$
6) $f(x) = \cos^2\left(3\sqrt{x}\right)$	12) $f(x) = \cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$	18) $f(x) = \tan\left(4x^2\right)$

اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

١) اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١ : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = f(x) = a^x \quad \text{حيث} \quad a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

$$y' = a^x \ln a$$

مثال ١ : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي: $y = f(x) = 2^x$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي: $y' = 2^x \ln 2$

القانون ٢: إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$y = f(x) = ba^x$ حيث $a > 0$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

$$y' = ba^x \ln a$$

مثال ٢: إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي: $y = f(x) = 7\ 3^x$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي: $y' = 7\ 3^x \ln 3$

القانون ٣: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^{f(x)}$

لنضع $u = f(x)$ ولتكن u دالة قابلة للاشبقاق في x

وبالتالي فإن $y = ba^u$

ومنه فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ومنه $\dfrac{dy}{dt} = ba^u \ln a\, u'$

مثال٣: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{(3x^2+4x+5)}$

$$y' = 8\ 2^{3x^2+4x+5} \ln 2\,(6x+4) = (48x+32)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٤: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس يساوي $e \cong 2{,}718$

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي: $y = f(x) = b\,e^x$

من القانون ٣ فإن $y' = b\,e^x \ln e$ لكن $\ln e = 1$

إذن فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي: $y' = b\ e^x$

مثال ٤: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3e^x$

الحل: المشتقة الأولى للدالة السابقة تعطى كما يلي: $y' = 3e^x$

القانون ٥: إذا كانت لدينا الدالة $y = b\ e^{f(x)}$

لنضع $u = f(x)$ ولتكن u دالة قابلة للاشبقاق في x

وبالتالي فإن $y = b\ e^u$

ومنه فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

وبالتالي فإن $\frac{dy}{dt}=b\,e^{u}\ln e\;u'$ لكن $\ln e=1$

إذن المشتقة الأولى تكون كما يلي:

$$y'=\frac{dy}{dt}=b\,e^{u}\,u'$$

مثال ٥: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y=8\;e^{2x+1}$

الحل: المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y'=8\times 2\,e^{2x+1}=16e^{2x+1}$

مثال ٦: إذا كانت $y=-5\;e^{\sin x}$

فإن $y'=-5\cos x\,e^{\sin x}$

٢) اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ٦: إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$y=b\log_a x$ حيث $a>0, a\neq 1$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

$$y'=\frac{b\log_a e}{x}$$

القانون ٧: إذا كانت لدينا الدالة

$y=b\log_a f(x)$ حيث $a>0, a\neq 1$

لنضع $u=f(x)$ ولتكن u دالة قابلة للاشبقاق في x

وبالتالي فإن $y=b\log_a u$

ومنه فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=b\frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال ٧: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y=3\log\left(6x^{5}\right)$

الحل: المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y'=\frac{3\left(30x^{4}\right)\log e}{6x^{5}}=\frac{15x^{4}}{x^{5}}\log e=\frac{15}{x}\log e.$

القانون ٨: إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y=b\ln x$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هي $y'=\frac{b\ln e}{x}$ لكن $\ln e=1$

وبالتالي فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي: $y'=b\frac{1}{x}$

مثال ٨: مشتقة الدالة $y=2\ln x$ هي $y'=\frac{2}{x}$ و مشتقة الدالة $y=\ln x$ هي $y'=\frac{1}{x}$

القانون ٩: إذا كانت لدينا الدالة $y=\ln f(x)$

لنضع $u=f(x)$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

وبالتالي فإن $y=b\ln u$

ومنه فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=b\frac{u'}{u}\ln e$$

وبما أن $\ln e=1$ ، إذن المشتقة الأولى للدالة $y=b\ln u$ تعطى كما يلي:

$$y'=\frac{dy}{dx}=b\frac{u'}{u}$$

مثال ٩: اشتق الدالة التالية: $y=e^{-x}\ln x^2$

$$y'=-e^{-x}\ln x^2+\frac{2x}{x^2}e^{-x}=\left(\frac{2}{x}-\ln x^2\right)e^{-x}$$

تمارين محلولة:احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=\log_3(3x^2-5)$	5) $y=\ln\frac{x^4}{(3x-4)^2}$	9) $y=e^{x^2}$	13) $y=e^{-x}\ln x$
2) $y=\ln(x+3)^2$	6) $f(x)=\ln\ \sin 3x$	10) $y=5^{3x^2}$	14) $y=e^{-2x}\sin 3x$
3) $y=\ln^2(x+3)$	7) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	11) $y=x^2 3^x$	15) $f(x)=\ln\tan e^{x^2}$
4) $y=\ln(x^2+2)(x^2+3)$	8) $y=e^{-\frac{1}{2}x}$	12) $y=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$	16) $f(x)=\ln\sqrt{1-2x}$

الحل:

1) $y=\log_3(3x^2-5)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2-5}\log_3 e\,\frac{d}{dx}(3x^2-5)=\frac{6x}{3x^2-5}\log_3 e$$

2) $y=\ln(x+3)^2$

$$y=\ln(x+3)^2=2\ln(x+3)$$

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{1}{x+3}.\frac{d}{dx}(x+3)=\frac{2}{x+3}$$

3) $y=\ln^2(x+3)$

$$\frac{dy}{dx}=2\ln(x+3).\frac{d}{dx}\ln(x+3)=2\ln(x+3).\frac{1}{x+3}\frac{d}{dx}(x+3)=\frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

4) $y=\ln(x^3+2)(x^2+3)$

لدينا $y=\ln(x^3+2)(x^2+3)=\ln(x^3+2)+\ln(x^2+3)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^3+2}.\frac{d}{dx}(x^3+2)+\frac{1}{x^2+3}.\frac{d}{dx}(x^2+3)=\frac{3x^2}{x^3+2}+\frac{2x}{x^2+3}$$

5) $y=\ln\frac{x^4}{(3x-4)^2}\Rightarrow y=\ln\frac{x^4}{(3x-4)^2}=\ln x^4-\ln(3x-4)^2=4\ln x-2\ln(3x-4)$

6) $f(x)=\ln\ \sin 3x$

$$f'(x)=\frac{1}{\sin 3x}\frac{d}{dx}\ \sin 3x=\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}=3\cot 3x$$

7) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1+x^2)\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right).\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x+\sqrt{1+x^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

8) $y=e^{-\frac{1}{2}x}$

$$y'=e^{-\frac{1}{2}x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

9) $y=e^{x^2}$

$$y'=e^{x^2}.\frac{d}{dx}(x^2)=2xe^{x^2}$$

10) $y=5^{3x^2}$

$$y'=5^{3x^2}\ln 5.\frac{d}{dx}(3x^2)=6x5^{3x^2}\ln 5$$

11) $y=x^2 3^x$

$$y'=x^2.\frac{d}{dx}(3^x)+3^x.\frac{d}{dx}(x^2)=x^2 3^x\ln 3+2x3^x=x3^x(x\ln 3+2)$$

12) $y = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

$$y' = \frac{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{ax} - e^{-ax}\right) - \left(e^{ax} - e^{-ax}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)}{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)^2}$$

$$= \frac{a\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) - a\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)}{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)^2}$$

$$= \frac{a\left(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}\right) - a\left(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}\right)}{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)^2} = \frac{4a}{\left(e^{ax} + e^{-ax}\right)^2}$$

13) $y = e^{-x} \ln x$

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$$

14) $y = e^{-2x} \sin 3x$

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = e^{-2x}\left(3\cos 3x - 2\sin 3x\right)$$

15) $f(x) = \ln \tan e^{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan e^{x^2}}\frac{d}{dx}\left(\tan e^{x^2}\right) = \frac{1}{\tan e^{x^2}}\sec^2 e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{x^2} = \frac{2xe^{x^2}\sec^2 e^{x^2}}{\tan e^{x^2}}$$

16) $f(x) = \ln\sqrt{1-2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{d}{dx}\sqrt{1-2x} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-2x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x-1}$$

ويمكن حلها بطريقة أبسط

لدينا $f(x) = \ln(1-2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(1-2x)$

ومنه فإن $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x}\frac{d}{dx}(1-2x) = \frac{1}{2}\frac{-2}{1-2x} = \frac{-1}{1-2x} = \frac{1}{2x-1}$

تمارين

احسبمشتقة الدوال التالية

$1)\ y=t^3\ln\left(e^{5t}-1\right)$	$9)\ y=\sin x\ln\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^3+1}}$	$17)\ y=\ln\left(3x^4-5x^2+7x-1\right)$
$2)\ \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	$10)\ y=e^{3\ln\cos 2x}$	$18)\ y=\dfrac{\log x^2}{x}$
$3)\ y=e^{x^2-\sin 2x}\tan x$	$11)\ y=e^{\cos 3x}\cot(\frac{1}{x}-x^2)$	$19)\ y=x\ln\dfrac{e^x\sqrt{2x-3}}{x^2}$
$4)\ y=\sqrt[3]{x^2-2x-3}\csc x$	$12)\ y=e^{\sin 2x}\cos(-x^2)$	$20)\ y=e^{1+\tan 2x}$
$5)\ y=x^2 2^{3\tan x}$	$13)\ y=\dfrac{\tan x-x^2}{3^{\csc x}}$	$21)\ y=x^3\log_2\left(2x^3-1\right)$
$6)\ y=x^3\ln\sqrt{x}$	$14)\ y=\sqrt{2-\ln x^3}$	$22)\ y=x^4\ln\left(x^3-1\right)$
$7)\ y=\dfrac{e^{-x}+\cos x}{2e^{-2x}-3\ln x}$	$15)\ y=x(\ln x)^2$	$23)\ y=\dfrac{3\cot e^{2x}}{2\ln(x^2+3)}$
$8)\ y=\sec x^3\ln(x-3)$	$16)\ y=\dfrac{3e^{2x}-1}{\ln(x^2+5)}$	$24)\ y=\left(x^2+5x+1\right)\log_5(x+3)$

الاشتقاق الضمني

تعريف:

نقول إن الاشتقاق ضمنيا (أو الاشتقاق الضمني) وذلك عندما لا تتوفر لدينا معرفة الدالة أو تكون غير واضحة

لتكن $y=f(x)$ حيث y دالة في x و $f(x)$ غير واضحة إلينا فالاشتقاق يكون كما يلي :

لنفرض أننا نريد اشتقاق y^n بالنسبة لـ x فإن

$$\frac{d(y^n)}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

فإننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـ x و ذلك لأن $f(x)$ غير واضحة لدينا

مثال ١: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3-3x^2=xy+5 \qquad (1)$$

الحل: المطلوب منا اشتقاق y بالنسبة لـ x و هذا يعني أن y متعلقة بـ x يعني توجد دالة f حيث $y = f(x)$ ولكن هذه العلاقة f غير واضحة لدينا. لذلك علينا الاشتقاق ضمنيا

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3 + 3xy^2 y' - 6x = y + xy'$$
$$\Rightarrow 3xy^2 y' - xy' = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y'\left[x(3y^2 - 1)\right] = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y' = \frac{y - y^3 + 6x}{x(3y^2 - 1)}$$

مثال ٢: ليكن $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ أثبت أن $y' = 1$

الحل:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$\Rightarrow 2x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$$
$$\Rightarrow y'(2y - 2x) = 2y - 2x \Rightarrow y' = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

مثال 3 : أوجد y' إذا كان $y = x^x$

الحل: لدينا $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

نشتق الطرفين

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

نعوض قيمة $y = x^x$ إذن يصبح لدينا $y = x^x(\ln x + 1)$

تمارين : محلولة عن الاشتقاق الضمني

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

(1) $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$

$$\Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=\frac{y^2}{x^2}$$

(2) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'-y'=0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)}$$

3) $x^2=\frac{x+y}{x-y}$

$$2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$$

4) $y=\sqrt{1+\sin^3(xy^2)}$

$$\Rightarrow y=\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[3\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)\left(y^2+2xyy'\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}2xyy'\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[3\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2) + \frac{1}{2}y^2\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[3\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)$$

$$y'\left\{1 - xy\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[3\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)\right\} = \frac{3}{2}y^2\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2}\frac{y^2\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)}{1 - xy\left[1+\sin^3(xy^2)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[3\sin^2(xy^2)\right]\cos(xy^2)}$$

وبمكن حلها كما يلي: نربع الطرفين فنحصل على $y^2 = 1+\sin^3\left(xy^2\right)$

باشتقاق الطرفين يكون لدينا $2yy' = 3\sin^2(xy^2)\cos(xy^2)(y^2 + 2xyy')$

ومنه $2yy'\left(1 - 3x\sin^2(xy^2)\cos(xy^2)\right) = 3y^2\sin^2(xy^2)\cos(xy^2)$

وبالتالي: $y' = \dfrac{3y^2\sin^2(xy^2)\cos(xy^2)}{2y\left(1 - 3x\sin^2(xy^2)\cos(xy^2)\right)}$

5) $e^{xy} = x$

$$(y + xy')\; e^{xy} = 1 \Rightarrow y'xe^{xy} = 1 - ye^{xy} \Rightarrow y' = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy}} = \frac{1}{xe^{xy}} - \frac{y}{x}$$

6) $y^3 e^{xy} = \tan x$

$$3y^2y'e^{xy} + (y + xy')e^{xy} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow y'\left(3y^2 + x\right)e^{xy} = \sec^2 x - ye^{xy} \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 x - ye^{xy}}{\left(3y^2 + x\right)e^{xy}}$$

7) $x^2 = \dfrac{\cot y}{1+\csc y}$

$$2x = \frac{-y'\csc^2 y\,(1+\csc y) + y'\csc y\cot y\cot y}{(1+\csc y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x(1+\csc y)^2 = y'\left[\csc y\cot^2 y - \csc^2 y\,(1+\csc y)\right]$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x(1+\csc y)^2}{\csc y\cot^2 y - \csc^2 y\,(1+\csc y)}$$

8) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{-x^{-2}}{1+\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

$$y'=y\left\{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}\Rightarrow y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}$$

تمارين

تمرين ١ : احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

1) $xy+e^{xy}-y^3\sin x=y^3+9x$	7) $x^2=\frac{\cot y}{1+\csc y}$
2) $3x^2y^2+4xy-2y=0$	8) $\tan^3(xy^2+y)=x$
3) $x^3y^2-5x^2y+x=13$	9) $3x^2-4y^2=7$
4) $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$	10) $y^3\sin x-x^2=y^3e^{2x}$
5) $(x^2+3y^2)^3=x$	11) $y+\sin y=x$
6) $xy^{2/3}+yx^{2/3}=x^2$	12) $x\cos y=y$

تمرين ٢ : احسبميلالمماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

1) $x^2y-5xy^2+6=0;(3,1)$	
2) $x^{2/3}-y^{2/3}-y=1;(1,-1)$	
3) $y^2-x+1=0;(10,3)\,3$	
4) $\frac{1-y}{1+y}=x;(0,1)$	

المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشبقاق n من المرات

فمثلا المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

لتكن $y=f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n مرات علي المجال $I \subset \Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}=f'(x)$$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(f'(x)\right)}{dx}=f''(x)$$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(f''(x)\right)}{dx}=f'''(x)$$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$$y^{(4)}=\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d\left(f'''(x)\right)}{dx}=f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـ y بالنسبة لـ x)

. . . .

. . . .

. . . .

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx}=f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال ١: أوجد المشتقة الثانية للدالة $y=\sin x$

الحل:

$$y'=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

$$y''=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

مثال ٢: أوجد $\frac{d^3y}{dx}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y=6x^5$

الحل:
$$y' = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 5\times 6x^4 = 30x^4$$
$$y'' = \frac{d}{dx}\left(30x^4\right) = 4\times 30x^3 = 120x^3$$
$$y''' = \frac{d}{dx}\left(120x^3\right) = 3\times 120x^2 = 360x^2$$

مثال٣: أوجد y'' إذا كان $y^5 = \cos x$

الحل:
$$\frac{d}{dx}\left(y^5\right) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$\Rightarrow 5y^4 y' = -\sin x \Rightarrow y' = \frac{-\sin x}{5y^4}$$
$$\frac{d}{dx}\left(5y^4 y'\right) = \frac{d}{dx}(-\sin x)$$
$$\Rightarrow 4\times 5y^3 y'y' + 5y^4 y'' = -\cos x. \Rightarrow -20y^3 \frac{\sin^2 x}{25y^8} + 5y^4 y'' = -\cos x$$
$$\Rightarrow \frac{4\sin^2 x}{5y^5} + 5y^4 y'' = -\cos x \Rightarrow 5y^4 y'' = -\cos x - \frac{4\sin^2 x}{5y^5}$$
$$\Rightarrow 5y^4 y'' = -\cos x - \frac{4}{5}\tan x \sin x \Rightarrow y'' = -\frac{1}{5y^4}\left(\cos x + \frac{4}{5}\tan x \sin x\right)$$

مثال ٤ : أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-x}\ln x$

الحل:
$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$
$$y'' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال ٥ : أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-2x}\sin 3x$

الحل:
$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$
$$y'' = 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) - 2y'$$
$$= -9e^{-2x}\sin 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2\left(3e^{-2x}\cos 3x - 2\sin 3x\right)$$
$$= -e^{-2x}\left(12\cos 3x + 5\sin 3x\right)$$

مثال6: أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-x}\ln x^2$

الحل: لدينا $y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال ٤ فإن $y'' = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٧: أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5+3x^3+5x-1$

الحل: بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

تمرين

جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث إن المسافة (s) بالقدم feet عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة

$$s = t^3 - 2t$$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثوان

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثوان

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

الحل

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2-2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = \left(3t^2-2\right)\Big|_{t=4} = 3\left(4^2\right)-2 = 46\ ft/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4} = 6t\Big|_{t=4} = 6\times 4 = 24\ ft/\sec^2$$

3) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\ fet/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}\sec$$

تمارين

تمرين ١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y = 3x^2 - 2x^3; \quad y''$	7) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x \; ; \; \dfrac{d^6y}{dx^6}$
2) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x^5 \; ; \; y''2$	8) $y = \dfrac{x}{x-4} \; ; \; \dfrac{d^2y}{dx^2}$
3) $y = 7 + 6x^2 - 4x^4; \; y'''$	9) $y = \dfrac{2x}{x^2+1} \; ; y''$
4) $y = 8x^3 - 2x^4; \; y'''$	10) $y = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x}{4}; \; \dfrac{d^3y}{dx^3}$
5) $y = x(x-1)^3; y''$	11) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}} ; y''$
6) $y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x); \; y''$	12) $y = (1+x^2)\ln x \; ; y''$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

13) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1 \; ; x = 1$

14) $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x-7} \; ; x = 2$

15) $f(x) = (4 - x^4)^{\frac{3}{4}} \; ; \; x = -3$

16) $f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4} \; ; \; x = 1$

17) $f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4 + 3} \; ; \; x = -1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

18) $s = (2t^2 - 3)^4 \; ; t = 2h$

19) $s = \dfrac{t}{2t^2 - 3} \; ; \; t = 4.6h$

20) $s = \sqrt{3.4 - t^4} \; ; t = 1h$

21) $s = t^2\sqrt{1 + t^2} \; ; t = 1h$

22) $s = (2t + 7)\sqrt{t^3 - 1} \; ; \; t = 2h$

23) $s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1 \; ; t = 2.8h$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية – ٢

تطبيقات التفاضل

تطبيقات التفاضل

٢

الجدارة: معرفة كيفية حل المسائل باستخدام التفاضل

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- القيم الصغرى والعظمى المحلية والرسم البياني للدوال
- كيفية كتابة معادلة المماس والناظم لمنحنى الدالة
- استخدام التفاضل في حل المسائل التطبيقية على القيم الصغرى والعظمى والنسب المترابطة.

الوقت المتوقع للتدريب: ساعة واحدة للفصل الأول وأربع ساعات للفصل الثاني وثلاث ساعات للفصل الثالث ، بحيث يكون الوقت الكلي ثمانية ساعات.

الفصل الأول: معادلة المماس والناظم للدالة

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم ذا الميل m والمار بالنقطة (x_0, y_0) تعطى بما يلي :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال ١: اكتب معادلة المماس للمنحني $y = 2 + x^2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: ميل المماس عند النقطة $(-1,3)$ هو مشتق الدالة عند هذه النقطة

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,3)} = 2x\Big|_{(-1,3)} = 2(-1) = -2$$

معادلة المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = m[x - (-1)] \Rightarrow y - 3 = -2(x + 1) = -2x - 2$$

$$\Rightarrow y = -2x - 2 + 3 \Rightarrow y = -2x + 1$$

مثال ٢ : اكتب معادلة العمودي على المماس للمنحني $y = 2 + x^2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: لتكن m ميل المماس و m_1 ميل العمودي عليه إذن $m \times m_1 = -1$ أي أن $m_1 = -\frac{1}{m}$

من المثال السابق ميل المماس $m = -2$ فإن ميل العمودي عليه $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-3)] \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

مثال ٣: اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3,4)$

الحل: ميل المماس

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فيكون لدينا

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,4)} = \frac{-2(3)}{2(4)} = -\frac{3}{4}$$

معادلة المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

ميل العمودي على المماس $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4 + 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

تمارين إضافية:

اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة

1) $3x - 2y + 4 = 0\ ;\ (2,4)$

2) $y = 4 - x + 3x^2\ ;\ (-1,8)$

3) $y = x^4 - 2x^2\ ;\ (2,8)$

4) $y^2 - 3x^2 + 2x - 3 = 0\ ;\ (1,2)$

5) $2xy + y^2 - 3 = 0\ ;\ (1,1)$

6) $x^2 y - 3y^2 + 10 = 0\ ;\ (-1,2)$

الفصل الثاني : القيم العظمى و الصغرى (المحلية)

النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة $f(x)$

تعريف ١

نقول إن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى نسبية في النقطة x_0 إذا كان هناك مجال مفتوح U مركزه x_0 بحث يكون :

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in U$$

ونقول إن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى نسبية في النقطة t_0 إذا كان هناك مجال مفتوح I مركزه t_0 بحث يكون :

$$f(x) > f(t_0) \qquad \forall x \in I$$

نظرية ١

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 وتبلغ في هذه النقطة نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية فإن $f'(x_0) = 0$

النقاط الحرجة

تعريف ٢

النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي النقاط التي تنعدم عندها المشتقة الأولى للدالة $f(x)$.

من التعريف السابق ولحساب النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x ومنه نحسب القيمة المرفقة للدالة لكل قيمة للمتغير x .

مثال ١ : أوجد النقاط الحرجة للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x

$$y' = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -1$$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لـ x

لما $x = 2$ فإن $y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -\frac{4}{3}$

لما $x = -1$ فإن $y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$

ومنه فإن النقاط الحرجة هي : $(2,-\frac{4}{3}),(-1,\frac{19}{6})$

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى في النقطة x_0 فإن مشتقة $f(x)$ موجبة عندما تكون $x<x_0$ وقريبة منها قربا كافيا ، أي أن ميل المماس موجب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يسارها. ومشتقة $f(x)$ سالبة عندما تكون $x>x_0$ وقريبة منها قربا كافيا، أي أن ميل المماس سالب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يمينها.

أما إذا كان الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى في النقطة x_0 فإن $f'(x)<0$ من أجل كل $x<x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا، و $f'(x)>0$ من أجل كل $x>x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا.

مثال ٢: أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y=\sqrt{16-x^2}$

الحل : الدالة $y=\sqrt{16-x^2}$ معرفة ومستمرة على المجال $[-4,+4]$ وهي تبلغ قيمة عظمى نسبية تساوي 4 في النقطة $x=0$ لأن:

$f(x)<4$ من أجل كل $0<x\le 4$ و $-4\le x<0$

مثال ٣: أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

الحل: إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشبقاق في كل نقطة من $\Re$ ومشقتها تعطى بما يلي:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

وإن المشتقة تنعدم في النقاط $x=-1$ و$x=1$ وإشارته تحدد من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. ونلاحظ من الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	1 $\quad +\infty$
$1-x$	+	+	-
$1+x$	-	+	+
$1-x^2$	-	+	-

أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x<-1$ و $f'(x)>0$ من أجل كل $-1<x<1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من السالبة إلى الموجبة حول النقطة التي يكون فيها $x=-1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى محلية وهي $(-1,-\frac{1}{2})$

وأيضا $f'(x)>0$ من أجل كل $-1<x<1$ و $f'(x)<0$ من أجل كل $x>1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من الموجبة إلى السالبة حول النقطة التي يكون فيها $x=1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى محلية وهي $(1,\frac{1}{2})$.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة سالبة فإن هذه النقطة هي نهاية عظمي محلية

وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة موجبة فإن هذه النقطة هي نهاية صغرى محلية

مثال ٤ : أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

الحل: المشتقة الأولى والثانية

$$y'=x^2-x-2,$$
$$y''=2x-1$$

من المثال ١ فإن النقاط الحرجة هي $(2,-\frac{4}{3}),(-1,\frac{19}{6})$

بالنسبة للنقطة الحرجة $(2,-\frac{4}{3})$

$$y''\Big|_{x=2}=2(2)-1=3>0$$

ومنه $(2,-\frac{4}{3})$ هي نهاية صغرى محلية

بالنسبة للنقطة الحرجة $(-1,\frac{19}{6})$

$$y''\Big|_{x=-1}=2(-1)-1=-3<0$$

ومنه $(-1,\frac{19}{6})$ هي نهاية عظمى محلية

نقطة الانعطاف

إذا كانت المشتقة الثانية معدومة وتغير إشارتها حول نقطة فإنهذه النقطة هي نقطة انعطاف.

مثال ٥ : بالنسبة للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

$$y''=2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

إذا كان $x<\frac{1}{2}$ فإن $y''<0$ وإذا كان $x>\frac{1}{2}$ فإن $y''>0$

ومنه فعندما يكون $x=\frac{1}{2}$ يكون لدينا نقطة انعطاف

لحساب الإحداثية الثانية نعوض بقيمة $x=\frac{1}{2}$ في عبارة الدالة

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(\frac{1}{2})+2=\frac{11}{12}$$

إذن النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{12}\right)$ هي نقطة انعطاف.

رسم المنحنيات:

لرسم منحنى دالة $f(x)$ يمكن اتباع الخطوات التالية:

-تحديد مجموعة تعريف الدالة $f(x)$.

-حساب النهايات عند أطراف فترات مجموعة التعريف واستنتاج المستقيمات المسات إن وجدت

-حساب المشتقة ودراسة إشارتها.

-إيجاد النقاط الحرجة

-حساب المشتقة الثانية ودراسة إشارتها.

- تلخيص كل ما سبق في جدول تغيرات الدالة ثم رسم المنحنى .

مثال ٦ : ارسم منحنى الدالة: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

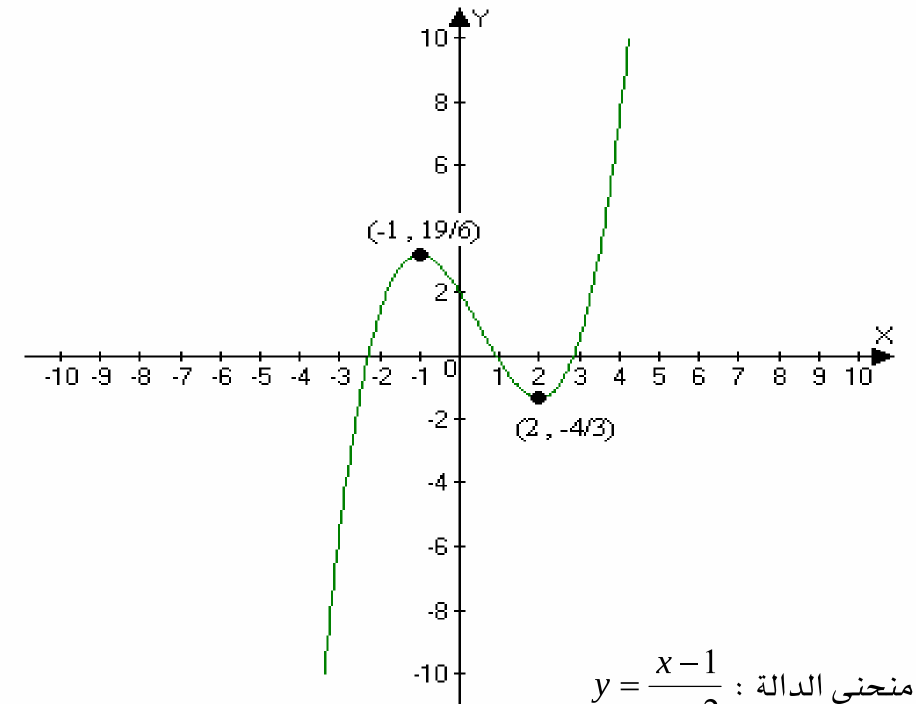
الحل : إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

لدينا من المثال ٤ النقطة $(2,-\frac{4}{3})$ هي نهاية صغرى محلية والنقطة $(-1,\frac{19}{6})$ هي نهاية عظمى محلية

ومن المثال ٥ النقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{12}\right)$ هي نقطة انعطاف

النهايات: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2=+\infty$

الرسم البياني



مثال ٧: ارسم منحنى الدالة : $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

الحل:

مجموعة التعريف هي:$(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$ لأن المقام ينعدم عندما يكون $x=-2$ أي أن الدالة غير معرفة عند هذه النقطة ومعرفة من أجل كل قيمة للمتغير $x\neq -2$

النهايات :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$

ومنه $y=1$ مستقيم مقارب في جوار $\infty,-\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{-3}{0^-}=\infty$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$

ومنه $x=-2$ مستقيم مقارب في جواري 2-

المشتقة الأولى : $f'(x)=\dfrac{(1)(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}=\dfrac{x+2-x+1}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0\quad \forall x\in(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$$

وبالتالي ليس هناك نقاط حرجة

المشتقة الثانية :
$$f'(x) = 3(x+2)^{-2}$$
$$f''(x) = -6(x+2)^{-3} = \frac{-6}{(x+2)^3} \neq 0 \ , \quad \forall x \in (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$$

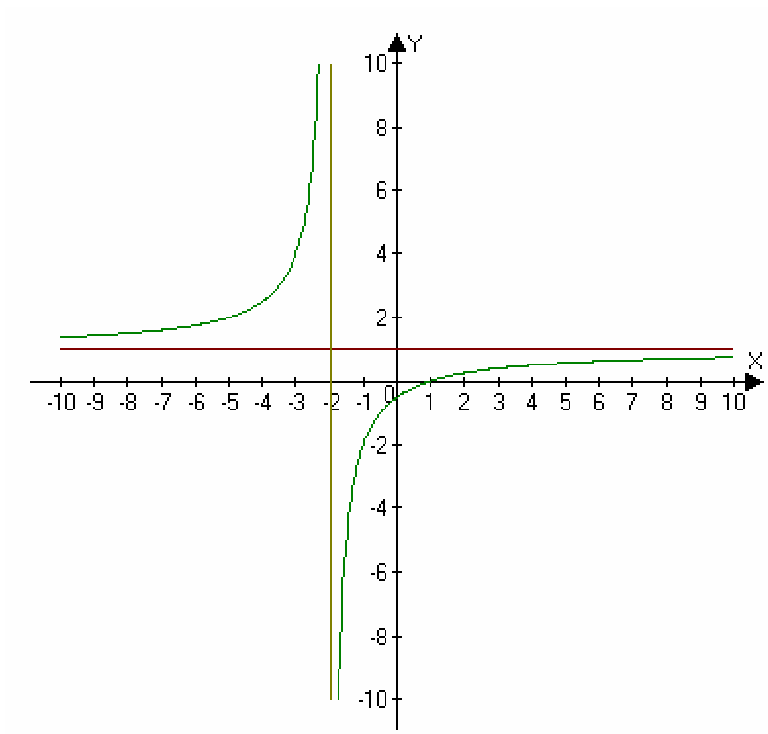
وبالتالي ليس هناك نقاط انعطاف

نقاط التقاطع مع المحاور:
$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{0+1} = -\frac{1}{2}$$

نقطة تقاطع مع محور العينات $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
$$\frac{x-1}{x+2} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطة تقاطع مع محور السينات : $(1,0)$

الرسم البياني للدالة



مثال ٨: ارسم منحنى الدالة : $y = x^5 - 15x^3$

الحل :

إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

المشتقة الأولى: $y' = 5x^4 - 45x^2$

المشتقة الثانية: $y'' = 20x^3 - 90x$

لحساب النقاط الحرجة ، نحل المعادلة $5x^4 - 45x^2 = 0$

$$5x^4 - 45x^2 = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0, 3, -3$$

نستعمل اختبار المشتقة الثانية

لما $x = 0$ فإن $y''\Big|_{x=0} = 20x^3 - 90x\Big|_{x=0} = 0$

لما $x = 3$ فإن $y''\Big|_{x=3} = 20x^3 - 90x\Big|_{x=3} = 20(3)^3 - 90(3) = 270 > 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية صغرى محلية عند $x = 3$

$$x = 3 \Rightarrow y = (3)^5 - 15(3)^3 = -162$$

إذن $(3,-162)$ هي نهاية صغرى محلية

لما $x = -3$ فإن $y''\Big|_{x=-3} = 20x^3 - 90x\Big|_{x=-3} = 20(-3)^3 - 90(-3) = -270 < 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية عظمى محلية عند $x = -3$

$$x = -3 \Rightarrow y = (-3)^5 - 15(-3)^3 = 162$$

إذن $(-3,162)$ هي نهاية عظمى محلية

ولنستعمل اختبار المشتقة الأولى للنقطة الحرجة $(0,0)$

$$x < 0: \ y' = 5x^2(x^2 - 9) < 0$$

$$x > 0: \ y' = 5x^2(x^2 - 9) < 0$$

أي أن لا يوجد تغيير لإشارة المشتقة الأولى في جوار $x = 0$ ومنه $(0,0)$ لاهي نهاية صغرى ولا عظمى

لنبحث عن نقطة الانعطاف إن وجدت بوضع $y'' = 0$

$$y'' = 20x^3 - 90x = 10x(2x^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

لندرس تغيرات إشارة للمشتقة الثانية بجوار هذه النقاط

لدينا $x < 0: \ y'' > 0; \quad x > 0: \ y'' < 0$

ومنه $(0,0)$ هي نقطة انعطاف

ولدينا $x < \frac{3}{\sqrt{2}}:\ y'' < 0;\quad x > \frac{3}{\sqrt{2}}:\ y'' > 0$

ومنه $(\frac{3}{\sqrt{2}},-100)$ هي نقطة انعطاف

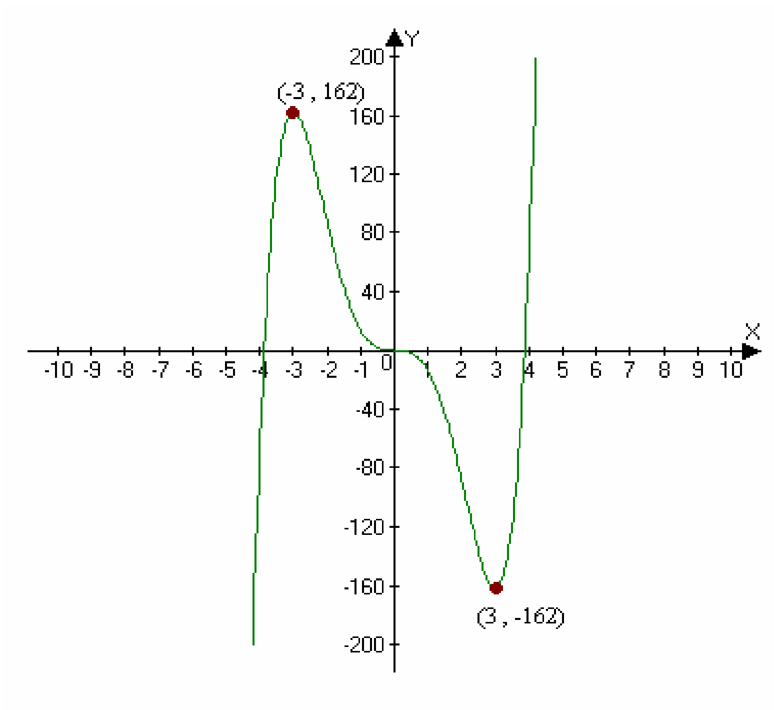
ولدينا $x < -\frac{3}{\sqrt{2}}:\ y'' < 0;\quad x > -\frac{3}{\sqrt{2}}:\ y'' > 0$

ومنه فإن $(-\frac{3}{\sqrt{2}},100)$ هي نقطة انعطاف

نلاحظ أن الدلة $f(x)$ دالة فردية أي أن $f(x) = -f(-x)$ ومنه فإنالرسم البياني للدالة يكون متناظرة بالنسبة للمركز

نقاط التقاطع مع محور السينات : هي $(0,0),(\sqrt{15},0),(-\sqrt{15},0)$

الرسم البياني للدالة



مثال ٩: ارسم

منحنى الدالة : $y = x^4 - 2x^2$

الحل : إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

المشتقة الأولى: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$

المشتقة الثانية: $y'' = 12x^2 - 4$

لحساب النقاط الحرجة ، نحل المعادلة $4x(x-1)(x+1) = 0$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

نستعمل اختبار المشتقة الثانية

لما $x = 0$ فإن $y''\Big|_{x=0} = 12x^2 - 4\Big|_{x=0} = -4 < 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية عظمى محلية عند $x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

إذن $(0,0)$ هي نهاية عظمى محلية

لما $x = 1$ فإن $y''\Big|_{x=1} = 12x^2 - 4\Big|_{x=1} = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية صغرى محلية عند $x = 1$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^4 - 2(1)^2 = -1$$

إذن $(1,-1)$ هي نهاية صغرى محلية

لما $x = -1$ فإن $y''\Big|_{x=-1} = 12x^2 - 4\Big|_{x=-1} = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$$

إذن $(-1,-1)$ هي نهاية صغرى محلية

لنبحث عن نقطة الانعطاف إن وجدت بوضع $y'' = 0$

$$y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

لندرس تغيرات إشارة للمشتقة الثانية بجوار هذه النقاط

لدينا $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}:\ y'' > 0;\quad x > -\frac{1}{\sqrt{3}}:\ y'' < 0$

ومنه $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$ هي نقطة انعطاف

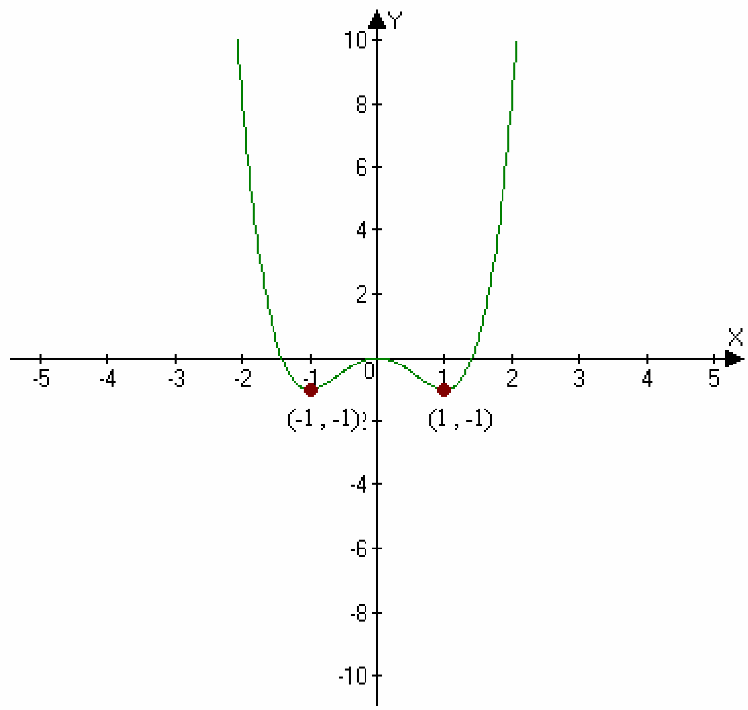
ولدينا $x < \frac{1}{\sqrt{3}}: \ y'' < 0; \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}}: \ y'' > 0$

ومنه $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$ هي نقطة انعطاف

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ دالة زوجية أي أن $f(x) = f(-x)$ ومنه فإن الرسم البياني للدالة يكون متناظرة بالنسبة لمحور العينات

نقاط التقاطع مع محور السينات: هي $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$

الرسم البياني للدالة



تمارين إضافية: ارسم منحنيات الدوال التالية:

$1) y = x^3$	$2) y = -x^3$	$3) y = \sqrt{x}$	$4) y = 1 - x^2$
$5) y = x^2 + \frac{16}{x^2}$	$6) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	$7) y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4}$	$8) y = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

الفصل الثالث : تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

لنفرض أنه يمكن كتابة قيم x و y المتناسبة من الشكل $y = f(x)$ ومنه يمكن أن نحسب القيم العظمى أو الصغرى للدالة

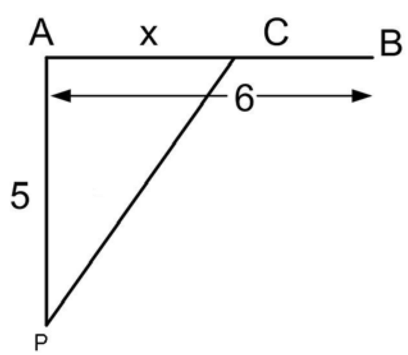
تمارين محلولة :

تمرين ١ :

متحرك M يبدأ من نقطة P تبعد عن النقطة A $(5Km)$ ويسير بسرعة $2Km$ في الساعة قاصدا النقطة B التي تبعد عن A $(6Km)$ إلى اليمين

أوجد النقطة C الواقعة بين A و B والتي يجب أن يتجه إليها المتحرك لكي يصل منها إلى B بسرعة $4\text{km}/\text{h}$ وفي أقصر وقت ممكن

الحل



إذا وضعنا $x = \overline{AC}$ ، نجد أن $\overline{PC} = \sqrt{25 + x^2}$ و $\overline{CB} = 6 - x$

ومنه فإنالزمن اللازم لقطع المسافة $\overline{PC}$ بسرعة 2km/h هو

$$t_1 = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{2}$$

والزمن اللازم لقطع المسافة $\overline{CB}$ بسرعة 4km/h هو $t_2 = \dfrac{6 - x}{4}$

إذن الزمن اللازم ليصل المتحرك إلى B هو

$$t = t_1 + t_2 = \frac{6 - x}{4} + \frac{\sqrt{25 + x^2}}{4}$$

و يكون الزمن اللازم ليصل المتحرك إلى B أقصر ما يمكن إذا كان $\dfrac{dt}{dx} = 0$ ومنه

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4} + \frac{x}{2\sqrt{25 + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{25 + x^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2x = \sqrt{25 + x^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 25 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$$

وبما أن المسافة لا يمكن لها أن تكون سالبة إذن $x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

تمرين ٢:

لتكن لدينا كرة S نصف قطرها $a=8$ أوجد ارتفاع الاسطوانة الدورانية القائمة التي يمكن أن ترسم ضمن الكرة S بحيث يكون حجمها أعظم ما يمكن.

الحل: ليكن z ارتفاع الاسطوانة المطلوب رسمها ضمن الكرة S و r نصف قطر قاعدتها، فنجد أن حجم الاسطوانة هو $v=\pi r^2 z$

وبما أن: $r^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=a^2$

فيكون: $v=\pi z\left(a^2-\frac{z^2}{4}\right)$

إن الدالة $v=v(z)$ قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة لـ z و تأخذ قيمة عظمى في نقطة يكون فيها $\frac{dv}{dz}=0$ ، ومنه:

$$\frac{dv}{dz}=\pi(a^2-\frac{z^2}{4})-\frac{1}{2}\pi z^2=0\Rightarrow \pi a^2-\pi\frac{3z^2}{4}=0\Rightarrow \pi a^2=\frac{3z^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{3z^2}{4}\Rightarrow z=\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

وبما أن الارتفاع يكون موجباً إذن $z=\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{16}{\sqrt{3}}$

ولمعرفة هل أن هذا الارتفاع يحقق حجماً أعظم أو أدنى نحسب المشتقة الثانية عند هذا الارتفاع

$$v''=-\frac{6}{4}\pi z\Rightarrow v''(\frac{16}{\sqrt{3}})=-\frac{3}{2}\pi(\frac{16}{\sqrt{3}})=-\pi\frac{24}{\sqrt{3}}<0$$

إذن الحجم يكون أعظم من أجل الارتفاع $z=\frac{16}{\sqrt{3}}$

تمرين ٣:

القوة الكهربائية P (Watts) المولدة من إحدى المصادر تعطى بالمعادلة التالية:

$$P=5.12R-\frac{8}{3}R^3$$

حيث R هي المقاومة (ohms) بالدائرة الكهربائية.

١) من أجل أية قيمة للمقاومة تكون القوة الكهربائية عظمى ؟

٢) ما هي القوة الكهربائية العظمى ؟

الحل: إن الدالة $p = p(R)$ قابلة للاشبقاق من أجل كل قيمة لـ R^* و تأخذ قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dp}{dR} = 0$ ، ومنه:

$$P' = 5.12 - 8R^2 = 0 \Rightarrow 8R^2 = 5.12 \Rightarrow R = \pm\sqrt{\frac{5.12}{8}} \Rightarrow R = \pm 0.8\ Ohms$$

لكن المقاومة لا تكون سالبة ومنه : $R = 0.8\ Ohms$

لمعرفة هل هذه القيمة تقابلها قيمة عظمى أو صغرى، نحسب المشتقة الثانية

$$P'' = -16R \Rightarrow P''(0.8) = -16(0.8) = -12.8 < 0$$

ومنه هذه القيمة تقابلها قيمة عظمى.

إذن القوة الكهربائية تكون عظمى من أجل $R = 0.8\ ohms$ وهي :

$$P(0.8) = 5.12 - \frac{8}{3}(0.8)^3 = 2.731 watts$$

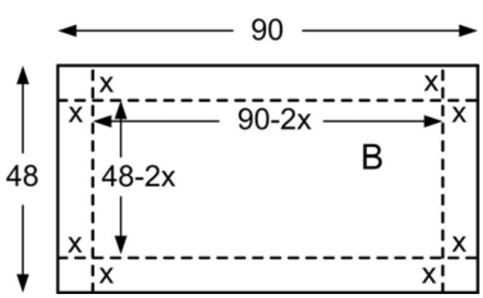
تمرين ٤ :

نستخدم قطع مستطيلة من الورق المقوى، أطواله 48 سم في 90 سم لإنتاج علب مفتوحة، بقطع نفس المربع من كل زاوية ورفع الجهات لإلصاقها

كم يجب أن تكون مساحة المربع المقطوع حتى يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن

الحل :

ليكن x هو طول ضلع المربع المقطوع في كل زاوية .ومنه يكون حجم العلبة :



$$V = (90 - 2x)(48 - 2x)x \Rightarrow V = 4(x^3 - 69x^2 + 1080x)$$

بالاشتقاق بالنسبة ل x نحصل على:

$$V' = 4(3x^2 - 138x + 1080)$$
$$= 12(x^2 - 46x + 360) = 12(x - 10)(x - 36)$$
$$V' = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ أو } x = 36$$

لمعرفة أي من القيمتين تقابلها حجم أكبر أو أصغر نحسب قيمة المشتقة الثانية عند هاتين القيمتين

$$V'' = 12(2x - 46) = 24(x - 23)$$

ومنه $V''(10) = -312 < 0$ و $V''(36) = 312 > 0$

إذن القيمة $x = 10$ تقابلها قيمة عظمى والقيمة $x = 36$ تقابلها قيمة صغرى ومنه

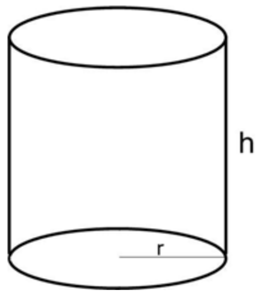
مساحة المربع هي $x^2 = 100\,cm^2$

تمرين ٥ :

أوجد الأطوال الأوفر اقتصاديا لبناء خزاناً أسطوانياً مغلقاً حجمه $16\pi\, m^3$ لتخزين أسمدة كيميائية

الحل :

ليكن r نصف قطر قاعدة الخزان و h ارتفاعه .



مساحة الخزان هي :

$$A = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

حجم الخزان هو:

$$V = \pi r^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16\pi}{\pi r^2} = \frac{16}{r^2}$$

بالتعويض في مساحة الخزان ينتج:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}$$

وهذا يعطي عبارة A كدالة في r

وهذه الدالة قابلة للاشبقاق من أجل كل قيم $r \neq 0$ و تأخذ قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dA}{dr} = 0$ ومنه:

$$A' = 4\pi r - 32\pi r^{-2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = 32\pi r^{-2}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{32\pi}{4\pi} = 8 \Rightarrow r = 2$$

لمعرفة هل يقابل هذه القيمة مساحة عظمى أو صغرى نحسب قيمة المشتقة الثانية عند هذه القيمة

$$A'' = 4\pi + 64\pi r^{-3} \Rightarrow A''(2) = 4\pi + 64\pi(2)^{-3} = 12\pi > 0$$

ومنه المساحة تكون صغرى عندما يكون نصف القطر $r = 2$ ولنحسب طول الارتفاع h من المعادلة

$$h = \frac{16}{r^2}$$

ويكون طول الارتفاع h من أجل $r = 2$ هو 4

إذن الأطوال الأوفر هي : $r = 2m,\ h = 4m$

تمرين ٦:

شركة تصنع بطاقات إلكترونية بحيث ربحها p يعطي كدالة لعدد البطاقات المنتجة في الأسبوع كالتالي: $P = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

كم يجب أن يكون إنتاج البطاقات في الأسبوع للحصول على أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

تأخذ الدالة p قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dp}{dx} = 0$ ومنه:

$$P' = 15x^4 - 30x^2 + 15 = 15(x^4 - 2x^2 + 1) = 15(x^2 - 1)^2$$

$$P' = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ أو } x = -1$$

لا يمكن عدد البطاقات أن يكون سالبا إذن : $x = 1$

و منه لمعرفة هل تحقق $x = 1$ قيمة الربح عظمى أو صغرى نحسب قيمة المشتقة الثانية عند $x = 1$

$$P'' = 60x^3 - 60x \Rightarrow P''(1) = 60 - 60 = 0$$

لا يمكننا أن نستنتج من هذا هل يقابل $x = 1$ قيمة عظمى أم صغرى إذن نستخدم المشتقة الأولى :

$$P' = 15(x^2 - 1)^2 \geq 0, \forall x$$

إذن $x = 1$ لا يقابلها قيمة عظمى

ومنه القيمة العظمى تتحصل علبها بأقصى عدد ممكن من البطاقات لأن $P' \rangle 0$ أي أن الدالة متزايدة .

ملاحظة:

يمكن حلها بطريقة أبسط وهو ملاحظة من البداية أن المشتقة موجبة دوما وبالتالي الدالة متزايدة دوما ومنه للحصول على أكبر ربح ممكن هو إنتاج أقصى عدد من البطاقات.

تمارين إضافية :

١) إذا كانت الباخرة B في الساعة التاسعة صباحا على بعد 104km إلى الشرق تماما بالنسبة لباخرة أخرى A.وكانت B مبحرة نحو الغرب تماما بسرعة $16km/hr$ أما A فكانت مبحرة نحو الجنوب تماما بسرعة $24km/hr$ ، فإذا استمرتا وفق البرنامج الموصوف فمتى تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما وعلى أي بعد؟

٢) أوجد عددين موجبين مجموعها ٣٦ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

٣) قسم العدد 10 إلى جزئين بحيث يكون مجموع مربعي الجزئيين أصغر ما يمكن

٤) لتكن لدينا كرة s نصف قطرها $a = 8$ أوجد نصف قطر القاعدة والارتفاع للمخروط الدوراني القائم الذي يمكن أن يرسم على الكرة بحيث يكون حجمه أصغر ما يمكن.

٥) أوجد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل المنطقة المحصورة بين القطع المكافىء $y^2 = 4px$ والمستقيم $x = a > 0$ بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

٦) قسم العدد ١٢٠ إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب p لأحد هما بمربع الآخر أكبر ما يمكن

٧) مساحة قطعة من ورق الإعلانات تساوى $2m^2$. فإذا كانت الهوامش المطلوبة من أعلى الورقة وأسفلها $21cm$ وعلى الجانبين $14cm$ ، فما هما بعدا قطعة الورق كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن؟

٨) فلاح عنده 600 م من السياج ويرغب في استعماله كلية في حصر حقل مستطيل الشكل يحاذي نهرا ولا يحتاج إلى سياج من جهة النهر . ماذا يجب أن تكون أبعاد الحقل لحصر أكبر مساحة ممكنة ؟

٩) وعاء أسطواني قاعدته دائرية الشكل وحجمه $1000cm^3$. أوجد أبعاده بحيث تكون كمية المعدن اللازمة لصنعه (أي مساحته السطحية) أصغر ما يمكن وذلك في الحالتين (ا) الوعاء مفتوح من قاعدته العليا (ب)الوعاء مغلق.

١٠) إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج x جهاز راديو يوميا تساوي $(25 + 35x + x^2 \tfrac{1}{4})$ دولارا والسعر الذي يمكن أن يباع به الجهاز الواحد $(50 - \tfrac{1}{2}x)$ دولارا.

فكم ينبغي أن يكون الإنتاج اليومي لنحصل على أكبر ربح ممكن ؟

١١) يراد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذي مساحة مفروضة. فإذا كان هناك نهر على أحد جوانب الحقل (طول المستطيل) و لا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن أنه إذا كان طول الحقل يساوى ضعف عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن.

١٢) ما هي أبعاد مخروط دائري قائم ذي حجم أقل ما يمكن نستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها 20cm.

١٣) بين أن المثلث المتساوي الأضلاع والذي ارتفاعه 3r هو أقل المثلثات المتساوية الساقين مساحة والتي يمكن رسمها على دائرة نصف قطرها r.

الفصل الرابع : النسب المترابطة

تطبيقات على الاشتقاق في معادلات التغير المرتبطة بالزمن (النسبة المترابطة)

تمارين محلولة :

تمرين ١ :

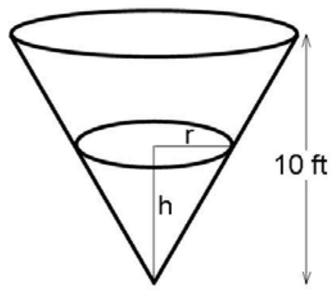
يسقط سائل في إناء مخروطي الشكل بمعدل $10\ ft^3/\min$. فإذا كان نصف قطر قاعدة الإناء يساوى الارتفاع ويساوي $10\ ft$. أوجد معدل ارتفاع السائل في المخروط عندما يكون ارتفاع السائل يساوى $5\,ft$.

الحل: لنعتبر أن v حجم السائل و r نصف قطر المخروط الذي يشكله السائل و h ارتفاعه كلاهما قيم تتغير بالنسبة للزمن

حيث إن معدل ازدياد حجم السائل بالنسبة للزمن يساوي $\frac{dv}{dt}=10\ ft^3/\min$

نلاحظ من الرسم أن شكل الماء عند اللحظة t يأخذ شكل المخروط ارتفاعه هو h ويساوى نصف قطر القاعدة r

حجم المخروط $v=\frac{\pi}{3}r^2h$



وبما أن ارتفاع المخروط الذي يشكله السائل يساوى نصف قطر القاعدة

إذن حجم السائل عند اللحظة t

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}h^3$$

نشتق الطرفين فنحصل على

$$\frac{dv}{dt}=\frac{3\pi}{3}h^2\frac{dh}{dt}=\pi h^2\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\pi h^2}\frac{dv}{dt}$$

وبما أن معدل ازدياد حجم السائل بالنسبة للزمن يساوي $\frac{dv}{dt}=10\ ft^3/\min$

فمنه فإنمعدل ارتفاع السائل هو $\frac{dh}{dt}=\frac{10}{\pi r^2}$

ومعدل ارتفاع السائل عندما يكون $h=5\,ft$

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{h=5}=\frac{10}{\pi h^2}\Big|_{h=5}=\frac{2}{5\pi}\ ft/\min$$

تمرين ٢ :

ينتج تيارا شدته i في سلك نصف قطره r فرق جهد $V = 0.04\frac{i}{r^2}$. أوجد نسبة تزايد فرق الجهد في سلك نصف قطره $r = 0.12\,cm$ إذا كانت نسبة تزايد شدة التيار هي $0.03\ A/s$

الحل :

لنعتبر أن V و i قيم تتغير بالنسبة للزمن بينما نصف القطر r ثابت ومنه يمكن تعويض قيمة الثابت r في عبارة فرق الجهد ونحصل على :

$$r = 0.12 \Rightarrow V = 0.04\frac{i}{(0.1)^2} = 2.78i$$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$\frac{dV}{dt} = 2.78\frac{di}{dt}$$

و بما أن نسبة تزايد شدة التيار $\frac{di}{dt} = 0.03$

إذن نسبة تزايد فرق الجهد هي: $\frac{dV}{dt} = 2.78(0.03) = 0.08\ V/s$

تمرين ٣:

يضغط غاز في بالون كروي الشكل بمعدل $100\ ft^3/\min$ فإذا كان ضغط الغاز ثابتا أوجد معدل ازدياد نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون عندها نصف القطر يساوى $5\ ft/\min$

الحل:

لنعتبر أن v حجم البالون و r نصف قطره كلاهما قيم تتغير بالنسبة للزمن

لدينا معدل ضغط الغاز في بالون كروي $100\ ft^3/\min$ (حجم البالون يزداد بمعدل $100\ ft^3/\min$)

نبحث عن معدل ازدياد نصف قطر البالون ثم نوجد هذا المعدل عندما يكون نصف القطر يساوي $5\,ft$

نفرض أنه عند اللحظة t حجم البالون هو v ونصف قطره هو r

من المعلوم أن حجم البالون $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3}3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dv}{dt}$$

لدينا معدل ضغط الغاز في البالون $\frac{dv}{dt} = 100\ ft^3/\min$

ومنه فإنمعدل ازدياد نصف قطر البالون

$$\frac{dr}{dt}=\frac{100}{4\pi r^2}\ ft/\min$$

ومعدل ازدياد نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $r=5\ ft$

$$\frac{dr}{dt}\Big|_{r=5}=\frac{100}{4\pi r^2}\Big|_{r=5}=\frac{100}{4\times 25\pi}=\frac{1}{\pi}\ ft/\min$$

تمرين ٤:

جسم يبلغ وزنه 45 كغ على سطح الأرض يصبح وزنه w كم على ارتفاع r كم فوق سطح الأرض بحيث : $w=45\left(1+\frac{r}{2500}\right)^{-2}$. أوجد سرعة تغير وزن الجسم على ارتفاع 525 كم فوق سطح الأرض إذا كانت نسبة تزايد ارتفاعه هي $\frac{dr}{dt}=33\ km/s$.

الحل :

لنعتبر أن w و r قيم تتغير بالنسبة للزمن ولنشتق طرفي معادلة وزن الجسم ونحصل على :

$$\frac{dw}{dt}=45(-2)\left(1+\frac{r}{2500}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2500}\frac{dr}{dt}\right)$$

و بما أن نسبة تزايد الارتفاع $\frac{dr}{dt}=33$

إذن نسبة تغير وزن الجسم هي

$$\frac{dw}{dt}=-90\left(1+\frac{r}{2500}\right)^{-3}\left(\frac{33}{2500}\right)$$

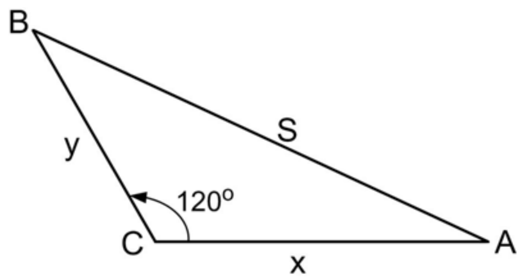
و نسبة تغير وزن الجسم عندما يكون الارتفاع $r=525$ تكون:

$$\frac{dw}{dt}=-90\left(1+\frac{r}{2500}\right)^{-3}\left(\frac{33}{2500}\right)=-90\left(1+\frac{525}{2500}\right)^{-3}\left(\frac{33}{2500}\right)=-0.67\ km/s$$

تمرين ٥ :

تبحر سفينتان a و b منطلقتان من A و B على الترتيب متباعدتان عن النقطة C في اتجاهين بحيث إن الزاوية $A\hat{C}B = 120$ ، ما هو معدل تغير البعد بينهما في اللحظة التي تكون فيها المسافة $CA = 8km$ والمسافة $CB = 6km$ وكانت السفينة a تبحر بمعدل $20km/h$ والسفينة b تبحر بمعدل $30km/h$.

الحل:



نفرض أنه عند اللحظة t

طول $x = CA$ (المسافة بين A و C)

طول $y = CB$ (المسافة بين B و C)

طول $s = AB$ (المسافة بين B و C)

لدينا $s^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120$

وبما أن $\cos 120 = -\frac{1}{2}$

إذن $s^2 = x^2 + y^2 + xy$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2x+y}{2s}\frac{dx}{dt} + \frac{2y+x}{2s}\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}\frac{dx}{dt} + \frac{2y+x}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}\frac{dy}{dt}$$

وبما أن $\frac{dy}{dt} = 30$, $\frac{dx}{dt} = 20$ فإن

معدل تغير المسافة بين النقطتين A و B بالنسبة للزمن

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}20 + \frac{2y+x}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}30$$

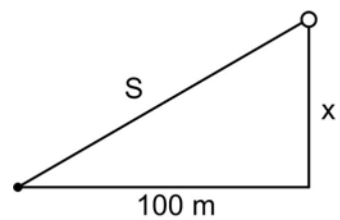
ومعدل تغير المسافة بين النقطتين A و B بالنسبة للزمن عندما تكون $y = 6$, $x = 8$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\times 8+6}{2\sqrt{8^2+6^2+8\times 6}}20 + \frac{2\times 6+8}{2\sqrt{8^2+6^2+8\times 6}}30 = \frac{440}{\sqrt{148}} + \frac{600}{\sqrt{148}} = \frac{520}{\sqrt{148}}km/h$$

تمرين ٦:

بالون جوي يرتفع عموديا بنسبة $2\,m/s$.يجلس ملاحظ على الأرض على بعد $100m$ من نقطة تقع عموديا تحت البالون. ما هي نسبة تغير المسافة بين البالون والملاحظ عندما يكون ارتفاع البالون $200m$ ؟

الحل :



ليكن x ارتفاع البالون و s المسافة بين البالون و الملاحظ

لدينا من نظرية فيثاغورث $s^2 = x^2 + 100^2$

باشتقاق الطرفين نحصل على

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+100^2}}\frac{dx}{dt}$$

وبما أن نسبة تزايد الارتفاع $\frac{dx}{dt} = 2$

فإننسبة تزايد المسافة بين الملاحظ والبالون هي:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+100^2}}$$

و نسبة تزايد المسافة بين الملاحظ والبالون عندما يكون ارتفاع البالون $x = 200$ هي:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{200}{223.6}2 \cong 1.8\,m/s$$

إذن المسافة بين الملاحظ والبالون عندما يكون ارتفاع البالون $x = 200$ تزيد بنسبة $1.8\,m/s$

تمارين إضافية:

١ - نازك كروي الشكل يخترق إذا دخل الغلاف الجوي للأرض .

أوجد نسبة تغير حجمه إذا كان نصف قطره r =74cm و نسبة تناقص نصف القطر هو $0.3\,{}^{cm}\!/_{s}$

٢ - يتسرب ماء من الخزان مخروطي رأسه إلى الأسفل، قطر قاعدته $8\,ft$ وعمقه $10\,ft$، بمعدل ثابت قدره $5\,ft^3/\min$. أوجد انخفاض سطح الماء في الخزان عند اللحظة التي يكون فيها عمق الماء $6\,ft$.

٣ -تتحرك النقطة A على المحور (x) بسرعة ثابتة $a\,ft/\sec$ ، بينما تتحرك النقطة B على المحور (y) بسرعة ثابتة $b\,ft/\sec$.

أوجد معدل تغير المسافة بين A و B عندما تكون A عند $(x,0)$ وتكون B عند النقطة $(0,y)$

٤ -كاميرا ترصد صاروخ من مرصد أرضي يبعد عن منصة الانطلاق مسافة. 3000ft فإذا كان الصاروخ يرتفع إلى الأعلى بسرعة 880ft/sec عندما كان على ارتفاع 4000ft.
احسب سرعة تغير المسافة بين الصاروخ و الكاميرا في تلك اللحظة.

٥ -ينسكب سائل بمعدل ثابت مساويا $2cm^3/\min$ من خلال قمع مخروطي الشكل ارتفاعه $16cm$ ونصف قطر قاعدته $4cm$. والمطلوب حساب سرعة انخفاض سطح السائل في اللحظة التي يكون فيها مستوى السائل على انخفاض $8cm$ من القاعدة .

٦ -يتزايد الترسب الدهني على جدار أحد الشرايين الدموية عند أحد المرضى بتصلب الشرايين بمعدل منتظم. .فإذا كان المقطع العرضي للشريان على شكل دائرة نصف قطرها $1.5cm$.
احسب معدل التغير في مساحة فتحة مجرى الدم بالنسبة لسمك الترسب الدهني على الجدار عندما يكون سمك الترسب $\frac{1}{2}cm$.

٧ -سلم طوله $4m$ مستند إلى جدار رأسي فإذا شد السلم من قاعدته منزلقا على الأرض و الجدار في اتجاه يبتعد فيه عن الجدار بسرعة $102m./\sec$. احسب سرعة هبوط حافة السلم العلوية في اللحظة التي تكون فيها على ارتفاع $2.4m$. من سطح الأرض .

٨ -بالون كروي الشكل يعبأ بالهواء بطريقة تجعل ازدياد حجمه يتم بمعدل منتظم مقداره $3ft.^3/\min$. احسب سرعة الازدياد في قطر البالون في اللحظة التي يكون عندها نصف قطره مساويا قدم واحد.

٩ -طائرة سرعتها $500mile/hr$ أقلعت بزاوية تميل على الأفقي 30^0. احسب سرعة ارتفاع الطائرة .

١٠ -طائرة ترتفع ارتفاعا منتظما بسرعة منتظمة قدرها $600mile/hr$. أطلق نحوها صاروخ مضاد للطائرات على خط يتعامد مع خط سيرها بحيث يصيبها عند نقطة (ولتكن p) في اللحظة التي تكون فيها الطائرة على بعد ميلين من النقطة p و الصاروخ على بعد $4mile$ من نفس النقطة منطلقا بسرعة $1200mile/hr$. في تلك اللحظة. احسب سرعة تناقص المسافة بين الطائرة و الصاروخ

المملكـة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية – ٢

التكامل وتطبيقاته

التكامل وتطبيقاته

٣

الجدارة: معرفة مفهوم التكامل المحدود والغير محدود وقدرته على تكامل دوال أساسية باستخدام طرق التكامل وكيفية تطبيق التكامل في حساب المساحة تحت المنحنى

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- التكامل المحدود وغير المحدود
- قواعد التكامل العامة وتكامل الدوال المثلثية وطريقة التكامل بالتجزئة والتكامل بالكسور الجزئية
- حساب المساحة تحتى منحنى الدالة باستخدام التكامل المحدود.

الوقت المتوقع للتدريب: عشر للفصل الأول و ساعاتان للفصل الثاني، بحيث يكون الوقت الكلي اثنتي عشرة ساعة.

الفصل الأول : التكامل غير المحدود

الدوال الأصلية والتكامل

تعريف ١:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ أي أن $dF(x) = f(x)dx$ بمعنى أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$

ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$. والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر

نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما ، دالة أصلية ، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية له تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي

تعريف 2 :

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ ، حيث c عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدودلـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

أمثلة:

لدينا $d(x^5) = 5x^4dx$ إذن $\int 5x^4dx = x^5+c$

و $d(e^{3x}) = 3e^{3x}dx$ إذن $\int 3e^{3x}dx = e^{3x}+c$

و $d(\cos x^2) = -2x\sin x^2dx$ إذن $\int -2x\sin x^2dx = \cos x^2+c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشبقاق) للتفاضل

قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

القاعدة ١: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدد ثابت فإن

$\int a dx = ax + c$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة :

$$1)\ \int 5dx = 5x + c$$
$$2)\ \int -7dx = -7x + c$$
$$3)\ \int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة ٢:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة:

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$
$$2)\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + c$$
$$3)\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة ٣ :

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي أن

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

وذلك لأن اشتقاق الطرفين يعطي $af(x) = af(x)$

أمثلة :

$$1)\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$
$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$
$$3)\ \int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}} + c$$

القاعدة ٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال أي أن :

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x. فإن

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل في x. فإن

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm .... \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm .... \pm \int f_n(x)dx$$

أمثلة :

$$1) \int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$

$$2) \int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \sqrt{x} dx - 2\int \frac{1}{x^3} dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2\int x^{-3} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{-3+1}}{-2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$$

$$3) \int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx = \int x^5 dx - \sqrt{2}\int x\, dx - 3\int x^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

القاعدة 5

لتكن u دالة في x و n عدد يخالف -1 فتكون لدينا القاعدة التالية:

$$\int u^n\, u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$ باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة:

$$1) \int (2x^3 - 6)^4 (6x^2)\, dx$$

لدينا $u = 2x^3 - 6 \Rightarrow u' = 6x^2$

وبالتالي فإن $\int (2x^3 - 6)^4 (6x^2)\, dx = \int u^4\, u' dx = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(2x^3 - 6)^5}{5} + c$

$$2) \int (x^4 - 2)^5 x^3\, dx$$

لدينا $u' = 4x^3 \Leftarrow u = x^4 - 2$ ومنه فإن

$$\int (x^4-2)^5 x^3\,dx = \frac{1}{4}\int (x^4-2)^5 (4x^3)dx = \frac{1}{4}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{24}(x^4-2)^6 + c$$

$$3)\int \sqrt{x^3+3x}\,(x^2+1)dx = \int (x^3+3x)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)dx$$

لدينا $u = x^3+3x \Rightarrow u' = 3x^2+3 = 3(x^2+1)$ وبالتالي فإن

$$\int \sqrt{x^3+3x_{+1}}\,(x^2+1)dx = \frac{1}{3}\int 3(x^3+3x+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,u'dx = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3+3x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

تمارين محلولة : احسب التكاملات التالية

$1)\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx$	$5)\int 3(3x^2-1)^3 x\,dx$	$9)\int \sqrt{1-4x}\,dx$
$2)\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$	$6)\int (x^4+2x)^2(4x^3+2)dx$	$10)\int \sqrt[3]{5+x^3}\,(x^2)dx$
$3)\int \sqrt{x}(x-3)^2 dx$	$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$	$11)\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$
$4)\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$	$8)\int 5(5x^7+2)^2 x^6 dx$	$12)\int (3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

الحل

$$1)\int (2\sqrt{x} - 3x^4)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int x^4 dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{x^5}{5} + c = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^5 + c.$$

$$2)\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 3\int x^{-4}dx - 4\int x^2 dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 3\frac{x^{-3}}{-3} - 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -x^{-3} - \frac{4}{3}x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$3)\int \sqrt{x}(x-3)^2\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x^2-6x+9\right)dx$$

$$= \int\left(x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+9x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-6\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+9\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{3}{2}}+c = \sqrt{x}\left(\frac{2}{7}x^3-\frac{12}{5}x^2+6x\right)+c$$

$$4)\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int\left(x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}\right)dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-3}}{-3}+c = -\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+c$$

$$5)\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\,dx$$

$$u = 3x^2-1 \quad \Rightarrow u' = 6x$$

$$\frac{1}{2}\int\left(3x^2-1\right)^3(6x)dx = \frac{1}{8}\left(3x^2-1\right)^4+c$$

$$6)\int\left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right)dx$$

$$u = x^4+2x \qquad \Rightarrow u' = 4x^3+2$$

$$\int\left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right)dx = \frac{1}{3}\left(x^4+2x\right)^3+c$$

$$7)\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$u = x^2+1 \quad \Rightarrow u' = 2x$$

$$\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$8)\int 5\left(5x^7+2\right)^2 x^6\,dx$$

$$u = 5x^7+2 \quad \Rightarrow u' = 35x^6$$

$$\frac{1}{7}\int\left(5x^7+2\right)^2(35x^6)dx = \frac{1}{21}\left(5x^7+2\right)^3+c$$

$$9)\int\sqrt{1-4x}\,dx = \int(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$u = 1-4x \quad \Rightarrow u' = -4$$

$$\int(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{4}\int(-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c = -\frac{2}{12}(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$10)\int \sqrt[3]{5+x^3}\left(x^2\right)dx=\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)dx$$

$$u=5+x^3 \quad \Rightarrow u'=3x^2$$

$$\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}(x)^2\,dx=\frac{1}{3}\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(3x^2\right)dx=\frac{1}{3}\frac{3}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c=\frac{1}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$11)\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}=\int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx+c$$

$$u=2x+3x^2 \quad \Rightarrow u'=2+6x=2(1+3x)$$

$$\int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int 2(1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{1}\left(2x+3x^2\right)^{\frac{1}{2}}+c=\sqrt{2x+3x^2}+c$$

$$12)\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)dx$$

$$u=\left(3x-x^3\right) \Rightarrow u'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)$$

$$\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{3}\int \left(3x-x^3\right)^5(3)\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{3}\frac{1}{6}\left(3x-x^3\right)^6+c=\frac{1}{18}\left(3x-x^3\right)^6+c$$

تمارين

احسب التكاملات التالية :

$1)\int \frac{1}{(1-3x)^2}dx$	$8)\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+5}}\,dx$	$15)\int \frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$
$2)\int (2x-3)\left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{2}{3}}dx$	$9\int \frac{3x^2-1}{\sqrt[5]{2x^3-2x+5}}\,dx$	$16)\ \int \frac{4}{\sqrt{x}}dx$
$3)\int (2-x)^2\sqrt{2-x}\,dx$	$10\ \int \frac{x^2-2x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$	$17)\ \int \frac{7x^3}{2-x^4}dx$
$4)\int \sqrt{1+x}\,dx$	$11)\int \frac{t^5+3t+7}{2\sqrt{t}}dt$	$18)\ \int x\left(1-x^2\right)^6dx$
$5\int (2x+7)\left(x^2+7x+3\right)^{4/5}dx$	$12)\int t\sqrt{7t^2+12}\,dt$	$19)\ \int (1-x)\left(1+2x-x^2\right)^3dx$
$6)\int \frac{\left(3-\sqrt{x}\right)^8}{\sqrt{x}}dx$	$13)\int \frac{ds}{\sqrt{3s+1}}$	$20)\int (2x-5)\sqrt{\left(x^2-5x+3\right)^5}\,dx$
$7)\ \int \frac{4+\ln x}{x}dx$	$14)\ \int (1-x)\,x^{\frac{1}{2}}dx$	$21)\int x\left(x^3-1\right)dx$

تكامل الدوال المثلثية

قواعد التكامل

I) بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية :

1) $\int \cos x dx = \sin x + c$	2) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
3) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$	4) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
5) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$	6) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

II) إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القوانين التالية

7) $\int u' \cos u\, dx = \sin u + c$	8) $\int u' \sin u dx = -\cos u + c$
9) $\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + c$	10) $\int u' \csc^2 u\, dx = -\cot u + c$
11) $\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + c$	12) $\int u' \csc u \cot u\, dx = -\csc u + c$

القانون ٣: تكامل الدالة $y = \tan x$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\cos^{-1} x| + c = \ln|\sec x| + c$$

وبالتالي فإن $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$

القانون ١٤: إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا

$$\int u' \tan u dx = \ln|\sec u| + c$$

القانون ١٥: تكامل الدالة $y = \cot x$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|\sin^{-1} x| + c = -\ln|\csc x| + c$$

وبالتالي فإن $\int \cot x dx = -\ln|\csc x| + c$

القانون ١٦: إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا

$$\int u' \cot u dx = -\ln|\csc u| + c$$

القانون ١٧: تكامل الدالة $y = \sec x$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

القانون ١٨ : إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا

$$\int u'\sec u dx = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

القانون ١٩ : تكامل الدالة $y = \sec x$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + c$$

القانون ٢٠ : إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا

$$\int u'\csc u dx = \ln\left|\csc u - \cot u\right| + c$$

أمثلة : احسب التكاملات التالية :

$1)\int \sin 4x dx$	$6)\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}dx$	$11)\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$
$2)\int \cos 2x dx$	$7)\int \sec^2(4x)dx$	$12)\int \frac{\cos(3+5\ln 9x).}{7x}dx.$
$3)\int x\tan\left(2x^2+1\right)dx$	$8)\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx$	$13)\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx.$
$4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx$	$9)\int x^2\csc\left(2x^3\right)\cot\left(2x^3\right)dx$	$14)\int \frac{\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x^3}}dx$
$5)\int x^2\sec\left(5x^3+a\right)dx$	$10)\int[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx$	$15)\int(\cos 3x-\sin 3x)^2dx$

الحل:

$$1)\int \sin 4x dx = \frac{1}{4}\int 4\sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$$

$$2)\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx = \sin 2x + c$$

$$3)\int x\tan\left(2x^2+1\right)dx = \frac{1}{4}\int 4x\tan\left(2x^2+1\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\sec\left(2x^2+1\right)\right| + c$$

$$4)\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx = -2\int -\frac{1}{2}\cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx = 2\ln\left|\csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$5)\int x^2\sec\left(5x^3+a\right)dx$ ، حيث a عدد ثابت

لدينا $u = 5x^3 + a \Rightarrow u' = 15x^2$

$$\int x^2\sec\left(5x^3+a\right)dx = \frac{1}{15}\int 15x^2\sec\left(5x^3+a\right)dx = \frac{1}{15}\ln\left|\sec\left(5x^3+a\right)+\tan\left(5x^3+a\right)\right| + c$$

6) $\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}dx$

$u = 2+3\ln x \Rightarrow u' = \frac{3}{x}$ لدينا

$$\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{x}\csc(2+3\ln x)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\csc(2+3\ln x)-\cot(2+3\ln x)\right|+c$$

7) $\int \sec^2(4x)dx = \frac{1}{4}\int 4\sec^2(4x)dx = \frac{1}{4}\tan(4x)+c$

8) $\int x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = -\int -x^2\csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx = \cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right)+c$

9) $\int x^2\csc(2x^3)\cot(2x^3)dx = \frac{1}{6}\int 6x^2\csc(2x^3)\cot(2x^3)dx$

$$= \frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right)+c = -\frac{1}{6}\csc 2x^3 + c$$

10) $\int[\sin(3x+2)+\cos(2-3x)]dx = \int \sin(3x+2)dx + \int \cos(2-3x)dx.$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)dx - \frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)dx. = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) - \frac{1}{3}\sin(2-3x)+c.$$

11) $\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$

$u = 2-\sqrt{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ نلاحظ أن

$$\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 3(-2)\int -\frac{1}{2}\frac{\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = -6\int \sin u du = 6\cos u + c = 6\cos(2-\sqrt{x})+c.$$

12) $\int \frac{\cos(3+5\ln 9x).}{7x}dx.$

$u = 3+5\ln 9x \Rightarrow du = \frac{5}{x}dx.$

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}dx = \frac{1}{5}\frac{1}{7}\int \frac{5}{x}\cos(3+5\ln 9x)dx$$

$$= \frac{1}{35}\int \cos u\, du = \frac{1}{35}\sin u + c = \sin(3+5\ln 9x)+c.$$

13) $\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx.$

$u = 9+4\sin 6x \Rightarrow du = 24\cos 6x dx$ نلاحظ أن

$$\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx = \frac{1}{24}\int 24\cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx = \frac{1}{24}\sin(9+4\sin 6x)+c$$

$$14)\ \int \frac{\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x^3}}dx$$

$$u = 5-4x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow du = \frac{4}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \frac{\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{x^3}}\tan(5-\frac{4}{\sqrt{x}})dx = \frac{1}{2}\int \tan u\, du = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\sec(5-\frac{4}{\sqrt{x}})\right| + c$$

$$15)\ \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx = \int \left(\cos^2 3x - 2\cos 3x \sin 3x + \sin^2 3x\right)dx$$

$$= \int \left(1 - 2\cos 3x \sin 3x\right)dx = \int dx - 2\int \cos 3x \sin 3x dx$$

لدينا $$\int \cos 3x \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x \sin 3x dx = \frac{1}{6}\sin^2 3x + c$$

إذن $$\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx = x - \frac{1}{3}\sin^2 3x + c$$

تمارين

احسب التكاملات التالية:

$1)\int \cos^3 x \sin x dx$	$8)\int \tan^3 5x \sec^2 5x\, dx$	$15)\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
$2)\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx$	$9)\ \int \sin 3\theta \sec^2 \cos 3\theta\ d\theta$	$16)\ \int \frac{\sec x \tan x}{(3+2\sec x)^2}dx$
$3)\int (1+\sin t)^2 \cos t dt$	$10)\ \int (1-\cos x)^3 \sin x dx$	$17)\ \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^3}dx$
$4)\int x\cos\left(3x^2\right)dx$	$11)\ \int (1-\sin 2\vartheta)^{\frac{1}{3}} \cos 2\vartheta\ d\vartheta$	$18)\ \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{5-\tan x}}dx$
$5)\ \int x^2 \sec^2 x^3 dx$	$12)\ \int x^7 \tan(8x^8+6)dx$	$19)\ \int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}}\ dx$
$6)\int \cos^3 2t \sin 2t\, dt$	$13)\int \sin(7-\cos 3x)\sin 3x dx$	$20)\int \frac{3\cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
$7)\int \cos 4\theta\sqrt{2-\sin 4\theta}d\theta$	$14)\int te^{t^2}\sec(2+e^{t^2})\tan(2+e^{t^2})dt$	$21)\ \int (2+\tan^2 x)\sec^2 xdx$

تكامل الدوال الأسية واللوغارتمية

قواعد التكامل

القاعدة ١: إذا كان a عدداً موجباً يخالف ١ $(a \neq 1)$ فإنه يكون لدينا القانون التالي :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

مثال ١: $\int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$

القاعدة ٢: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

مثال ٢: $\int 5^{-3x} dx = -\frac{1}{3}\int -3\, 5^{-3x} dx = -\frac{1}{3}\,\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c.$

مثال ٣: $\int x\, 6^{2x^2} dx = \frac{1}{4}\int 4x\; 6^{2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$

القاعدة ٣: إذا كان $a = e$ فيكون لدينا ما يلي :

$\int e^x dx = \dfrac{e^x}{\ln e} + c.$ لكن $\ln e = 1$ وبالتالي يكون لدينا القانون التالي

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

القاعدة ٤: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u' e^u dx = e^u + c.$$

مثال ٤: احسب التكامل التالي: $\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx$

الحل : لدينا $u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x - 2 = 2(x-1)$

وبالتالي فإن $\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\, e^{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2}\int u'\, e^u dx = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2-2x+1} + c$

مثال ٥: احسب التكامل التالي: $\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx$

الحل : لدينا $u = \sin x - x \Rightarrow u' = \cos x - 1$

وبالتالي فإن $\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx = \int u'\, e^u dx = e^u + c = e^{\sin x - x} + c$

القاعدة ٥: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + c$$

مثال ٦: احسب التكامل التالي : $\int \frac{e^x}{e^x - 2}dx$

الحل : لدينا $u = e^x - 2 \Rightarrow u' = e^x$

وبالتالي فإن $\int \frac{e^x}{e^x - 2}dx = \int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + c = \ln|e^x - 2| + c$

مثال ٧: احسب التكامل التالي : $\int \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x}dx$

الحل : لدينا $u = x^4 + 2x \Rightarrow u' = 4x^3 + 2 = 2(2x^3 + 1)$

وبالتالي فإن $\int \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3 + 1)}{x^4 + 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^4 + 2x| + c$

تمارين محلولة: احسب التكاملات التالية

1) $\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right)dx$	6) $\int 2^{1+\cot 5t} \csc^2 5t dt$	11) $\int e^{2x} \sec\left(e^{2x} - 1\right)dx$
2) $\int 2e^{2x+\cos x}(2 - \sin x)dx$	٧) $\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}dx$	12) $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2} + 5}dx$
3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$	8) $\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}dx$	13) $\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}dx$
4) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$	9) $\int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}dx$	14) $\int \frac{\sec^2 x}{5 - \tan x}dx$
5) $\int 3^{2x} e^{5-3^{2x}} dx$	10) $\int xe^{x^2}\left(e^{x^2} + 1\right)^7 dx$	15) $\int \frac{x + \cos 2x}{x^2 + \sin 2x} dx$

الحل:

$$1)\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right)dx = -e^{-x} - \frac{1}{2}\sin 2x + x + c$$

$$2)\int 2e^{2x+\cos x}(2 - \sin x)dx$$

$$u = 2x + \cos x \Rightarrow du = (2 - \sin x)dx$$

$$\int 2e^{2x+\cos x}(2 - \sin x)dx = \int 2e^u du$$

$$= 2e^u + c = 2e^{2x+\cos x} + c$$

$$3)\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int e^x\left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\int e^x\left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

$$4)\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int x^{-2}e^{x^{-1}}dx$$

$$u = x^{-1} \Rightarrow du = -x^{-2}dx$$

$$\int x^{-2}e^{x^{-1}}dx = -\int e^u du = -e^u + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

$$5)\int 3^{2x}e^{5-3^{2x}}dx$$

$$u = 5 - 3^{2x} \Rightarrow du = -2\,3^{2x}\ln 3dx$$

$$\Rightarrow 3^{2x}dx = -\frac{1}{2\ln 3}du$$

$$\int 3^{2x}e^{5-3^{2x}}dx = -\frac{1}{2\ln 3}\int e^u du = -\frac{1}{2\ln 3}e^u + c = -\frac{1}{2\ln 3}e^{5-3^{2x}} + c$$

$$6)\int 2^{1+\cot 5t}\csc^2 5tdt$$

$$u = 1 + \cot 5t \Rightarrow du = -5\csc^2 5tdt \Rightarrow \csc^2 5tdu = -\frac{1}{5}du$$

$$\int 2^{1+\cot 5t}\csc^2 5tdt = \frac{-1}{5}\int 2^u du = -\frac{1}{5\ln 2}2^u + c = -\frac{1}{5\ln 2}2^{1+\cot 5t} + c$$

$$٧)\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}dx = \int x^{-3}e^{5-2x^{-2}}dx$$

$$u = 5 - 2x^{-2} \Rightarrow du = 4x^{-3}dx \Rightarrow x^{-3}dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^{-3}e^{5-2x^{-2}}dx = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{5-2x^{-2}} + c$$

$$8)\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}dx = \int x^{-1}e^3e^{\ln 2x}dx = \int x^{-1}e^3(2x)dx = 2e^3\int dx = 2e^3x + c$$

$$9)\int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int (x-1)^{-\frac{1}{2}} e^{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$u=1+(x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow du=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=2du$$

$$\int (x-1)^{-\frac{1}{2}} e^{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx=\int 2e^{u}du=2e^{u}+c=2e^{1+(x-1)^{\frac{1}{2}}}+c$$

$$10)\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7 dx$$

$$u=e^{x^2}+1 \Rightarrow du=2xe^{x^2}dx \Rightarrow xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7 dx=\frac{1}{2}\int u^7 du=\frac{1}{2}\frac{u^8}{8}+c=\frac{1}{16}u^8+c=\frac{1}{16}\left(e^{x^2}+1\right)^8+c$$

$$11)\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx$$

$$u=e^{2x}-1 \Rightarrow du=2e^{2x}dx \Rightarrow e^{2x}dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx=\frac{1}{2}\int \sec u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan u+\sec u\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(e^{2x}-1\right)+\sec\left(e^{2x}-1\right)\right|+c$$

$$12)\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$$

$$u=e^{2x^2}+5 \Rightarrow du=4xe^{2x^2}dx \Rightarrow xe^{2x^2}dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx=\frac{1}{4}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln|u|+c=\frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right|+c$$

$$13)\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx$$

$$u=\sin 2x+\cos 2x \Rightarrow u'=2\cos 2x-2\sin 2x=2(\cos 2x-\sin 2x)$$

$$\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2(\cos 2x-\sin 2x)}{\sin 2x+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+c=\ln|\sin 2x+\cos 2x|+c$$

$$14)\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx$$

$$u=5-\tan x \Rightarrow u'=-\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}dx=-\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}dx=-\int \frac{u'}{u}dx=-\ln|u|+c=-\ln|5-\tan x|+c$$

$15)\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$

$u = x^2+\sin 2x \Rightarrow u' = 2x+2\cos 2x = 2(x+\cos 2x)$

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sin 2x\right| + c$$

تمارين

احسب التكاملات التالية

$1)\int 5e^{2x}dx$	$8)\int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x \ \tan 2x}dx$	$15)\int 5e^{2x}e^{1+e^{2x}}dx$
$2)\int xe^{5x^2+1}dx$	$9)\ \int x^2e^{x^3}dx$	$16)\ \int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}dx$
$3)\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$	$10)\ \int \frac{\sec x \tan x}{3+2\sec x}dx$	$17)\ \int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
$4)\int e^{-3x}\left(e^{-3x}+1\right)^{\frac{3}{5}}dx$	$11)\int e^{2\ln x}dx$	$18)\ \int e^{1+\cos x}\sin x dx$
$5\int 5^{2-3x^3}x^2dx$	$12)\int \frac{2e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$	$19\int e^{\sin e^{3x}}e^{3x}\cos e^{3x}dx\,)$
$6)\int \frac{2^{4-3\ln x}}{x}dx$	$13\int \sec x \ \ \tan x\, e^{5+2\sec x}dx\,)$	$20)\int 2\cos x 2^{1-\sin x}dx$
$7)\int \ \frac{3^{2-\cos 2x}}{5\csc 2x}dx$	$14)\int \frac{3^{5-e^{-3x}}}{e^{3x}}dx$	$21)\int (e^{-x}+e^{x})^2 dx$

التكامل بالتجزئة

مقدمة

لنفرض أننا نريد تكامل

$$\int x\sin x\, dx \quad \text{أو} \quad \int \sin x e^{-x}dx$$

نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق قوانين التكامل مباشرة ففي مثل هذه الحالات نحاول حلها بالتجزئة وهي تتمثل في تحويل التكامل الذي لايمكن حسابه مباشرة إلى مجموع جبري لدالة وتكامل يمكن حسابه

قانون التكامل بالتجزئة

من قانون مشتق جداء دالتين لدينا $d(uv) = vdu + udv$

نكامل الطرفين فنحصل على: $uv = \int vdu + \int udv$

ومنه قانون التكامل بالتجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int udv$ إلى حساب التكامل $\int vdu$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u, dv

و طريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال١: نفرض أننا نريد حساب $\int x\sin xdx$ لكن لايمكن حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة

ولنفرض $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \sin u dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال٢: احسب ما يلي: $\int xe^x dx$

الحل : نلاحظ أننا لا نستطيع أن نحلها مباشرة، إذن فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزئة.

لنفرض أن: $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

ومنه فإن $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$

لكن التكامل $\int \frac{x^2 e^x}{2}dx$ ليس من التكاملات التي يمكن أن نستخدم فيها أحد قوانين التكامل المباشر و ذلك بسبب اختيار u و dv اختيار خاطئا أو غير موفق، إذن نحاول إيجاد اختيار آخر.

إذن نحاول إيجاد اختيار آخر نفرضه ل u و dv

ولنأخذ $u = x \Rightarrow du = dx$

و $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

نطبق القانون: $\int udv = uv - \int vdu$

ومنه $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

إذن الاختيار الثاني موفق

مثال ٣: أوجد تكامل $\int \ln x dx$

الحل : نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x dx$

قفي هذا المثال يمكن حساب التكامل باستعمال طريقة تحويل المتغير

ولنأخذ $z = \ln x$

وبالتالي $z = \ln x \Rightarrow e^z = x \Rightarrow de^z = dx$

لدينا $\dfrac{de^z}{dz} = e^z \Rightarrow de^z = e^z dz$

ومنه $dx = e^z dz$

إذن التكامل السابق يصبح $\int \ln x dx = \int z de^z = \int z e^z dz$

وحسب المثال السابق

$$\int z e^z dz = e^z(z-1) + c$$

وبالتالي فإن $\int \ln x dx = e^{\ln x}(\ln x - 1) + c = x(\ln x - 1) + c$

ويمكن حسابه مباشرة باستعمال التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$

فيكون لدينا $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \dfrac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$

$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

مثال ٤ : أوجد تكامل $\int \sin^2 x dx$

الحل : لدينا $\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx$

و لنفرض ما يلي

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$du = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = vu - \int v du$ يكون لدينا

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

وبما أن

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$$

إذن

$$\int \sin^2 dx=-\sin x\cos x+\int\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$=-\sin x\cos x+\int dx-\int \sin^2 xdx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 xdx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 xdx+\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$

$$\Rightarrow 2\int \sin^2 xdx=-\sin x\cos x+x+c$$

ومنه فإن

$$\int \sin^2 xdx=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x+c=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+c$$

ملاحظة: كما هو واضح أن طريقة التكامل بالتجزئة تنقلنا من حساب تكامل صعب إلى تكامل أبسط لكن هذا يتوقف بصورة أدق عن اختيار $u,\ dv$ لذلك سنقدم بعض حالات الإختيار المناسب

حالات اختيار u,v

الحالة الأولى :

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n e^{ax}\,dx$

نفرض $u=x^n \;\Rightarrow du=nx^{n-1}dx$

ونفرض $dv=e^{ax}dx\Rightarrow v=\frac{1}{a}e^{ax}$

مثال ٥ : $\int x e^x\,dx$ المدروس سابقا في المثال ٢

الحالة الثانية :

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n \cos\omega x\,dx$ أو من الشكل $\int x^n \sin\omega x\,dx$

نفرض $u=x^n\Rightarrow du=nx^{n-1}dx$

ونفرض للشكل الأول $dv=\cos\omega xdx\Rightarrow v=\frac{1}{\omega}\sin\omega x$

ونفرض للشكل الثاني $dv=\sin\omega xdx\Rightarrow v=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x$

مثال ٦ : احسب التكامل: $\int x\cos x\,dx$

الحل : نفرض

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos xdx\Rightarrow v=\sin x$$

وحسب قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\int x\cos x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

الحالة الثالثة :

إذا كان التكامل من الشكل $I = \int x^n \ln x dx$

في هذه الحالة نفرض $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

ونفرض $dv = x^n .dx \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

مثال ٧ : احسب التكامل : $\int x^2 \ln x dx$

الحل : نفرض $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

ولنفرض $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

الحالة الرابعة:

إذا كان التكامل من الشكل $\int e^{ax}\sin \omega x dx$ أو من الشكل $\int e^{ax}\cos \omega x dx$

نفرض $u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx$

ونفرض للشكل الأول $dv = \sin \omega x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\omega}\cos \omega x$

ونفرض للشكل الثاني $dv = \cos \omega x dx \Rightarrow v = \frac{1}{\omega}\sin \omega x$

مثال ٨: احسب التكامل : $I = \int e^{3x}\sin 2x dx$

الحل: نفرض $u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}dx$

ونفرض $dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x dx$

وبالتالي فإن $I=\int e^{3x}\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x.e^{2x}+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2xdx$

نضع $I=-\frac{e^{3x}}{2}\cos 2xe^{3x}+\frac{3}{2}I_1$

نحسب الآن $I_1=\int e^{3x}\cos 2x$ ونستعمل مرة أخرى التكامل بالتجزئة

نفرض $u=e^{3x}\Rightarrow du=3e^{3x}$

ونفرض $dv=\cos 2xdx\Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$

ومنه فإن $\int e^{3x}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2xe^{3x}-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2xdx$

نرجع ونعوض في التكامل الأصلي I

$$\int e^{3x}\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2xe^{3x}+\frac{3}{4}\sin 2xe^{3x}-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2xdx$$

$$\Rightarrow\int e^{3x}\sin 2xdx+\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2xdx=e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow\frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2xdx=e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow\int e^{3x}\sin 2xdx=\frac{4}{13}e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

إذن التكامل المطلوب حسابه يعطى بما يلي:

$$\int e^{3x}\sin 2xdx=\frac{e^{3x}}{13}(-2\cos 2x+3\sin 2x)$$

تمارين محلولة: احسب التكاملات التالية:

1) $\int\cos^2 xdx$	4) $\int x\sqrt{x+4}dx$	7) $\int x^5e^{x^3}dx$
2) $\int\ln(5x+3)dx$	5) $\int xe^{1-3x}dx$	8) $\int x^2e^xdx$
3) $\int xe^{-3x}dx$	6) $\int x\sec x\tan xdx$	9) $\int x^3\sin(2x^2)dx$

الحل :

$$1)\int\cos^2 xdx$$

لدينا $\int\cos^2 xdx=\int\cos x\cos xdx$

نفرض أن $u=\cos x\Rightarrow du=-\sin x.$

و نفرض أن $dv=\cos x\Rightarrow v=\sin x.$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx.$$

$$= \sin x \cos x + \int (1-\cos^2 x) dx.$$

ومنه فإن

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int du - \int \cos^2 x du.$$

$$\Rightarrow\ 2\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + x + c.$$

$$\Rightarrow\ \int \cos^2 x du = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{4}\sin 2 + \frac{x}{2} + c.$$

$$2)\ \int \ln(5x+3) dx$$

نفرض أن

$$u = \ln(5x+3) \Rightarrow du = \frac{5}{5x+3}$$

ونفرض أن

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

وحسب قانون التكامل بالتجزئة يكون لدينا

$$\int \ln(5x+3) dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x}{5x+3} dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x+3-3}{5x+3} dx$$

$$= x\ln(5x+3) - \int dx + \int \frac{3}{5x+3} dx = x\ln(5x+3) - x + \frac{3}{5}\ln(5x+3) + c$$

$$= \left(x + \frac{3}{5}\right)\ln(5x+3) - x + c$$

$$3)\ \int xe^{-3x} dx$$

نفرض أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

ونفرض

$$dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int xe^{-3x} dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + c$$

$$4)\ \int x\sqrt{x+4} dx$$

نفرض أن

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

ونفرض

$$dv = (x+4)^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x\sqrt{x+4}dx=\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int(x+4)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{15}(x+4)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$5)\ \int xe^{1-3x}dx$$

بفرض أن $u=x\Rightarrow du=dx$

وبفرض أن $dv=e^{1-3x}dx\Rightarrow v=-\frac{1}{3}e^{1-3x}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int xe^{1-3x}dx=-\frac{1}{3}xe^{1-3x}+\frac{1}{3}\int e^{1-3x}dx=-\frac{1}{3}xe^{1-3x}-\frac{1}{9}e^{1-3x}=-\frac{1}{3}e^{1-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c$$

$$6)\ \int x\sec x\tan xdx$$

لنفرض أن $u=x\Rightarrow du=dx$

ولنفرض أن $dv=\sec x\tan xdx\Rightarrow v=\sec x$

وحسب قانون التكامل يالتجزئة يكون لدينا

$$\int x\sec x\tan xdx=x\sec x-\int\sec xdx=x\sec x-\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$7)\ \int x^5e^{x^3}dx$$

بفرض أن $u=x^3,\ dv=x^2e^{x^3}dx$ فإن $du=3x^2dx,\ v=\frac{1}{3}e^{x^3}$

إذن: $\int x^5e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+c=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+c$

$$8)\ \int x^2e^xdx$$

بفرض أن $u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

وبفرض أن $dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

لنحسب الآن $\int xe^xdx$ ونستعمل مرة أخرى التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $u=x\Rightarrow du=dx$

و $dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$

نطبق قانون التكامل بالتجزئة فنحصل على

$$\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$$

نعوض في حساب التكامل المطلوب فنحصل على الناتج

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$$9)\int x^3 \sin(2x^2)dx$$

بفرض أن $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

وبفرض أن $dv = x\sin(2x^2)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^3 \sin(2x^2)dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2) + \frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2) + \frac{1}{8}\sin(2x^2) + c$$

تمارين إضافية: احسب التكاملات التالية:

$1)\ \int x^3 e^{-x^2} dx$	$6)\int x(x+5)^{-10} dx$	$11)\ \int \frac{x^3}{\sec 5x} dx$
$2)\ \int x\ln\sqrt{x}dx$	$7)\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$	$12)\ \int x\sqrt{x+5}dx$
$3)\int \sqrt{x}\ln xdx$	$8)\int \frac{\cot(7x+5)\sin(3x+2)}{\csc(7x+5)}$	$13)\ \int \frac{x\tan 3x}{\cos 3x} dx$
$4)\ \int x\cos xdx$	$9)\int x^2 \sin xdx$	$14)\ \int x^2 e^{-x} dx$
$5)\ \int xe^{2x} dx$	$10)\int x\sec^2 xdx$	$15)\int x^3\cos(3x^2)dx$

التكامل بالكسور الجزئية

تمهيد

تسمى الدالة $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ بدالة كسرية إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود في x

مثال ١: الدوال التالية: $\frac{x-1}{x^2+1}, \frac{-2x+1}{x^2+1}, \frac{x(x+1)}{x^3+1}, \frac{1}{x(x^2+1)}$ دوال كسرية

بينما الدوال التالية : $\frac{\ln x}{x}, \frac{\sin x + e^x}{x^2}, \frac{|x-2|}{x^3}$ ليست بدوال كسرية

إذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقيا

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقي بمجوع كثيرة حدود وكسر حقيقي .مثل

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجوع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل :

$\dfrac{A}{(x-r)^k}$ أو $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث ax^2+bx+c غير قابل للاختزال أي لا يقبل جذورا حقيقية وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) وسنتطرق إلى الحالات التالية:

الحالة الأولى:

إذا كانت $g(x), f(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)(x+r_3).....(x+r_n)$ حيث $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq ... \neq r_n$

وإذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا. فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A_1}{x+r_1}+\dfrac{A_2}{x+r_2}+\dfrac{A_3}{x+r_3}+.....\dfrac{A_n}{x+r_n}$ حيث $A_1, A_2, ..., A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال٢: بسط الكسر التالي: $\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ إلى مجموع كسور جزئية

الحل: نفرض أن الثابتين A_1, A_2 يحققان ما يلي :

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2} \qquad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوجد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على

$$2x+1=A_1(x+2)+A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1=A_1(-2+2)+A_2(-2-2)$

ومنه $-3=-4A_2 \Rightarrow A_2=\dfrac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1=A_1(2+2)+A_2(2-2)$

ومنه $5=4A_1 \Rightarrow A_1=\dfrac{5}{4}$

نعوض A_1, A_2 في المعادلة (١) فيصبح لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

مثال ٣: أوجد التكامل $\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx$

الحل : نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام أحد قوانين التكامل مباشرة ولكن من المثال السابق لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

إذن
$$\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\ln|x+2|+c$$

الحالة الثانية :

إذا كانت $f(x),g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x)=(x+r)^n$ حيث $n\in\mathrm{N}$

و كانت $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا .فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x+r)}+\frac{A_2}{(x+r)^2}+\ldots\frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}}+\frac{A_n}{(x+r)^n}$ حيث $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال ٤: بسط الكسر $\frac{x-2}{(x+1)^3}$ إلى كسوره الجزئية

الحل : نفرض أن الثوابت A_1,A_2,A_3 تحقق ما يلي :

$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}$ (2) حيث A_1,A_2,A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوجد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على

$$x-2=A_1(x+1)^2+A_2(x+1)+A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-1$ فنحصل على $-1-2=0+0+A_3$ ومنه $A_3=-3$

نأخذ $x=0$ فنحصل على $-2=A_1+A_2+A_3$

ومنه $-2 = A_1 + A_2 - 3 \Rightarrow A_2 = 1 - A_1$

نأخذ $x = 1$ فنحصل على $1 - 2 = A_1(2)^2 + A_2(2) + A_3$

ومنه فإن $-1 = 4A_1 + 2A_2 - 3 \Rightarrow -1 = 4A_1 + 2(1 - A_1) - 3$

$$\Rightarrow -1 = 4A_1 + 2 - 2A_2 - 3 \Rightarrow 2A_1 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

وبالتالي فإن $0 = 1 - A_2 \Rightarrow A_2 = 1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (٢) فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3}$$

مثال ٥ : احسب التكامل $\int \frac{x-2}{(x+1)^3} dx.$

الحل : نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام قوانين التكامل مباشرة ولاكن من المثال السابق لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3}.$$

إذن

$$\int \frac{x-2}{(x+1)^3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^3} dx.$$

$$= -(x+1)^{-1} + \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + c.$$

ملاحظة: يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٥ : بسط الكسر $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$ إلى كسوره الجزئية

الحل : لدينا $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)(x-1)} = \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}$

نفرض أن. A_1, A_2, A_3. تحقق ما يلي:

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \qquad (3)$$

حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معا

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1).}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1.)$ فيكون لدينا

$$3x - 1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)$$

لنأخذ $x=1$ فنحصل على $3(1)-1=A_1(1-1)^2+A_2(1+1)(1-1)+A_3(1+1)$

ومنه $2=2A_3 \Rightarrow A_3=1$

لنأخذ $x=-1$ فنحصل على $3(-1)-1=A_1(-1-1)^2+A_2(-1+1)(-1-1)+A_3(-1+1)$

ومنه $-4=4A_1 \Rightarrow A_1=-1$

لنأخذ $x=0$ فنحصل على $3(0)-1=A_1(0-1)^2+A_2(0+1)(0-1)+A_3(0+1)$

ومنه $-1=A_1-A_2+A_3 \Rightarrow A_2=A_1+A_3+1=1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (٣) فيصبح لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

مثال ٦: أوجد التكامل $\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx$

الحل : نلاحظ أننا نحتاج إلى تجزئة الكسر $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$ ومن المثال السابق لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

إذن
$$\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx=-\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=-\ln|x+1|+\ln|x-1|-(x-1)^{-1}+c=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{x-1}+c$$

تمرين: احسب التكاملات الآتية

$1)\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$	$6)\int \frac{3xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$	$11)\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}dx$
$2)\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$	$7)\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}dx$	$12)\int \frac{t-5}{t^2+6t+5}dt$
$3)\int \frac{dx}{x^2-16}$	$8)\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}dx$	$13)\int \frac{3t+7}{t^2-2t-3}dt$
$4)\int \frac{2dx}{x^2+5x+4}$	$9)\int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}dx$	$14)\int \frac{2t^2-4}{(t+1)(t-2)(t-3)}dt$
$5)\int \frac{2x+7}{(x-4)(x+3)}dx$	$10)\int \frac{x-5}{x^2-64}dx$ □	$15)\int \frac{2x-3}{(x^2-1)(x+1)}dx$

الفصل الثاني : التكامل المحدود

النظرية الأساسية لحساب التكامل

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ والتكن $F(x)$ تكاملا غير محدد للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

مثال ١ : احسب التكامل التالي $\int_1^2 xdx.$

الحل : $\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

مثال ٢ : احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx.$

الحل :

$$\int_0^3 (x^3-4x+1)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^3$$

$$=\left(\frac{3^4}{4}-\frac{4\times 3^2}{2}+3\right)-(0-0+0)$$

$$=\frac{81}{4}-18+3=\frac{81}{4}-15=\frac{81-60}{4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

مثال 3 : احسب التكامل التالي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta.$

الحل : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin o = 1.$

خواص التكاملات المحددة :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \le x \le b$ فإن:

١) $\int_a^a f(x)dx = 0$

٢) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

٣) إذا كانت $a \le c \le b$ فإن $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

مثال ٤ : احسبالتكامل التالي $\int_{-1}^{2} |x|$

الحل : لدينا $|x| = \begin{cases} x\ , & if \quad x \ge 0 \\ -x, & if \quad x < 0. \end{cases}$

ومنه فإن

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x dx + \int_{0}^{2} x dx. = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}.$$

تمرين: احسب التكاملات المحدودة التالية:

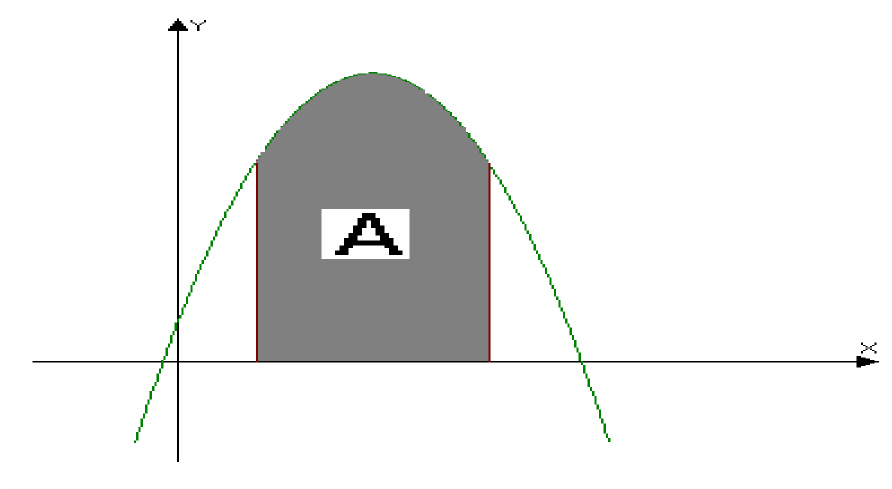
$1)\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$	$5)\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$	$9)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos x)dx$
$2)\int_0^2 (2-4x)dx$	$6)\int_0^3 f(x), where\, f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$	$10)\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$
$3)\int_{-1}^{2} \|2x-3\|\ dx$	$7)\int_{-2}^{2} f(x)dx, where\, f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 0 \\ x+3, & x > 0 \end{cases}$	$11)\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}\,dx$
$4)\int_2^3 \frac{x^2-2}{x^2}dx$	$8)\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$	$12)\int_0^2 (x^3-1)^{\frac{2}{3}} x^2 dx$

تطبيقات على التكامل المحدود

قواعد حساب المساحة باستعمال التكامل

لتكن الدالة $y = f(x)$ متصلة في الفترة $[a\,,b]$

١) إذا كانت $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\,,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي :



$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

مثال ١ : أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

الحل : بما أن $f(x) \geq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \textbf{ Square units}$$

2) إذا كانت $f(x) \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\,,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحني الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx.\right|$$

مثال 2: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = -2$ و $x = 2$

الحل : بما أن $f(x) = -x^2 \leq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي:

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} -x^2 dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}\right| = \left|-\frac{2^3}{3} + \frac{(-2)^3}{3}\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3} \textbf{ Square units}$$

3) إذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث إن $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx.\right|$$

٤) وإذا وجد c بين النقطتين a و b أي أن $a<c<b$ حيث إن $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a\ ,c]$ و $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c\ ,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a, b ومحور السينات تحسب كما يلي :

$$A=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\int_c^b f(x)dx$$

مثال ٣: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$

الحل : بما أن $f(x)=x^3\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ و $f(x)=x^3\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-2,0]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_{-2}^{0} x^3dx\right|+\int_0^2 x^3dx.=\left|\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=\left|-\frac{16}{4}\right|+\frac{16}{4}=4+4=8\ \textbf{Square units}$$

مثال ٤: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=-x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-3$ و $x=2$

الحل : بما أن $f(x)=-x^3\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-3,0]$ و $f(x)=-x^3\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\int_{-3}^{0}-x^3dx+\left|\int_0^2 -x^3dx\right|=-\frac{x^4}{4}\bigg|_{-3}^{0}+\left|\frac{-x^4}{4}\bigg|_0^2\right|=\frac{81}{4}+\left|-\frac{16}{4}\right|=\frac{81}{4}+\frac{16}{4}=\frac{97}{4}\ \textbf{Square units}$$

مثال ٥: أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $f(x)=x^2-6x+8$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

الحل : يتقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني إذا كان $f(x)=0$ وبالتالي للإيجاد نقاط التقاطع نضع:

$$x^2-6x+8=0$$

لدينا $x^2-6x+8=0\Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0\Leftrightarrow x=2$ أو $x=4$

إذن يقطع المنحنى المحور السيني عند $x=2$ و $x=4$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل ومن الجدول التالي:

x	$-\infty$	2	4 ∞
$x-2$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
$f(x)=(x-2)(x-4)$	+	-	+

يكون لدينا $f(x)\le 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[2,4]$ وبالتالي فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right)\Big|_2^4\right|=\left|\left(\frac{4^3}{3}-3(4)^2+8(4)\right)-\left(\frac{2^3}{3}-3(2)^2+8(2)\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{64}{3}-48+32\right)-\left(\frac{8}{3}-12+16\right)\right|=\left|\frac{64-48}{3}-\frac{8+12}{3}\right|=\left|\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\text{Square units}$$

مسائل

تمرين ١: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=x^2+1$ ومحور السينات من $x=2$ إلى $x=3$.

تمرين ٢: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=2x^2$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=2$.

تمرين ٣: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=(x+2)(x^2-2x-3)$ ومحور السينات من $x=-2$ إلى $x=1$.

تمرين ٤: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=3x$ ومحور السينات من $x=-1$ إلى $x=0$.

تمرين ٥: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=2(x+4)(x^2-2x-3)$ ومحور السينات من $x=-5$ إلى $x=3$.

تمرين ٦: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=\sin x$ ومحور السينات من $x=0$ إلى. $x=\frac{3\pi}{2}$

تمرين 7: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y=-2x^2+4x+30$ ومحور السينات

المملكـة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية – ٢

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

٤

الجدارة: معرفة مفهوم المعادلات التفاضلية، حل وتطبيق المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية على الدوائر الكهربائية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- مفهوم المعادلات التفاضلية
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية
- استخدام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية في التطبيقات الكهربائية.

الوقت المتوقع للتدريب: أربعة ساعات للفصل الأول و ساعاتان للفصل الثاني وأربع ساعات للفصل الثالث وساعاتان للفصل الرابع، بحيث يكون الوقت الكلي اثنتي عشرة ساعة.

الفصل الأول : المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

المعادلات التفاضلية

تعريف

المعادلات التفاضلية هي معادلة متعلقة بدالة غير معروفة وبين مشتقاتها وبين المتغير x لـ y

أمثلة:

$$1)\frac{dy}{dx}=x+5;\quad 2)xy'+y=3;\quad 3)y'''+2(y'')^2+y=\sin x$$

$$4)(y'')^2+(y')^3+3y=x^2;\qquad 5)\frac{d^2y}{dx}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

كل المعادلات السابقة هي عبارة عن معادلات تفاضلية

وحل المعادلة التفاضلية هو إيجاد عبارة الدالة التي تحقق المعادلة بمعنى أن المعادلة تكون صحيحة لما نعوض بعبارة هذه لدالة و مشتقاتها في المعادلة.

رتبة المعادلة التفاضلية

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة.

لنأخذ الأمثلة السابقة :

- المعادلة (١) و(٢) معادلتان من الرتبة الأولى
- المعادلة (٤) و(٥) معادلتان من الرتبة الثانية
- المعادلة (٣) معادلة من الرتبة الثالثة

درجة المعادلة التفاضلية

درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى رتبة اشتقاق في المعادلة.

من الأمثلة السابقة يتبين أن :

- المعادلات (١)، (٢)، (٤) و(٥) هي معادلات من الدرجة الأولى
- المعادلة (٤) هي معادلة من الدرجة الثانية.

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى عموما هي علاقة بين دالة (تعتبرمجهوله) y وبين مشتقتها الأولى و المتغير x لـ y. و تكتب هذه العلاقة عادة من الشكل: $\Phi(x,y,y')=0$

سوف نكتفي في هذا الفصل باعتبار الحالة الخاصة: $(1): y' = f(x,y)$

أي أننا نعتبر المعادلات التي نستطيع كتابتها على الشكل التالي: الطرف الأول من المعادلة هو المشتق y' بدلالة المتغير x و الدالة y وبطريقة أوضح ليكن: Ω مجالا من $\Re^2$ و ϕ دالة عددية(حقيقية) مستمرة في Ω:

$$f: \Omega \to R$$
$$(x,y) \to f(x;y)$$

المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتغيرات

تعريف

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى التي يمكن كتابتها من الشكل :

$p(y)dy + q(x)dx = 0$ حيث p,q دوال معطاة

تسمى بالمعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتغيرات.

وطريقة حلها تتم كما هو موضح في الأمثلة التالية:

مثال ١: حل المعادلة التفاضلية التالية $xy^2dx + \left(1-x^2\right)dy = 0$:

الحل: نقسم طرفي المعادلة على $y^2\left(1-x^2\right)$ فنحصل على $\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كما يلي:

بتكامل الطرفين

$$\int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{dy}{y^2} = c \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) - y^{-1} = c.$$

$$\ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - y^{-1} = c \Rightarrow y^{-1} = \ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - c$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي: $y = \left(\ln(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - c\right)^{-1}$

مثال ٢: حل المعادلة التفاضلية التالية: $\sin x\cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$ ، $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

الحل: بقسمة طرفي المعادلة على $\cos^2 y \cos^2 x$ نحصل على:

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{\cos^2 y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 y}dy = c$$

$$\Rightarrow \int \tan x \sec x dx + \int \sec^2 y dy = c \Rightarrow \sec x + \tan y = c$$

بتعويض $y = \frac{\pi}{4}, x = 0.$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c

$$\sec(0) + \tan\frac{\pi}{4} = c \Rightarrow c = 1 + 1 = 2$$

$$\sec x + \tan y = 2 \Rightarrow y = \tan^{-1}(2 - \sec x).$$

مثال ٣: حل المعادلة التفاضلية التالية: $\sin^2 x \cos x\, dx + y e^y dy = 0$

الحل : نكامل طرفي المعادلة

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx + \int y e^y dy = c$$

لدينا $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x$

لنحسب $\int ye^y dy$ باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int ye^y dy = ye^y - \int e^y dy = ye^y - e^y = e^y(y-1)$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$\frac{1}{3}\sin^3 x + e^y(y-1) = c \Rightarrow e^y(y-1) = c - \frac{1}{3}\sin^3 x$$

مثال ٤: حل المعادلة التفاضلية: $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dx = 0$

الحل: لدينا $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dx = 0 \Rightarrow x\left(y^2+1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على $\left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right)$ نحصل على:

$$\frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0$$

نكامل طرفي المعادلة

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right) = c$$

بوضع $2c = \ln c_1$ يكون لدينا

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right) = c_1 \Rightarrow y^2 + 1 = \frac{c_1}{x^2-1}$$

ومنه فإن $y = \pm\sqrt{\frac{c_1}{x^2-1} - 1} = \pm\sqrt{\frac{c_1 + 1 - x^2}{x^2-1}}$

مثال ٥ : حل المعادلة التفاضلية التالية: $\sin xdx+\cos xdy=y\sin xdx$ حيث $y(\pi)=2$

الحل: $\sin xdx+\cos xdy=y\sin xdx \Rightarrow (1-y)\sin xdx+\cos xdy=0$

بقسمة طرفي المعادلة على $(1-y)\cos x$ نحصل على

$$\tan xdx+\frac{dy}{1-y}=0$$

نكامل طرفي المعادلة

$$\int \tan xdx+\int\frac{dy}{1-y}=c \Rightarrow \ln\sec x-\ln(1-y)=c$$

بوضع $c=\ln c_1$ يكون لدينا

$$\frac{\sec x}{1-y}=c_1 \Rightarrow \sec x=c_1(1-y)$$

نعوض $x=\pi, y=2$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$\Rightarrow c_1=1 \quad \sec\pi=-c_1$$

ومنه $\sec x=(1-y)\Rightarrow \sec x=1-y \Rightarrow y=1-\sec x$

مثال ٦: حل المعادلة التفاضلية التالية: $yy'=4x$ حيث $y(1)=3.$

الحل: نكامل طرفي المعادلة $y\frac{dy}{dx}=4x \Rightarrow ydy=4xdx \Rightarrow \int ydy=\int 4xdx+c$

بحساب التكامل نحصل على:

$$\frac{y^2}{2}=4\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow y^2=4x^2+2c$$

بتعويض $y=3,\ x=1$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c

$$y(1)=3 \Rightarrow (3)^2=4\times 1^2+2c \Rightarrow 9-4=2c \Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$y^2=4x^2+5 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4x^2+5}$$

مثال 7: حل المعادلة التفاضلية التالية:. $xy'=4y$ حيث $y(1)=-3$

الحل: نكامل طرفي المعادلة $x\frac{dy}{dx}=4y \Rightarrow \frac{dy}{y}=4\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=4\int\frac{dx}{x}+c$

$$\ln y=4\ln x+c \Rightarrow y=c_1x^4 \quad \text{حيث} \quad c_1=e^c$$

بتعويض $y=-3,\ x=1$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c_1

$$\Rightarrow -3=c_1(1)^4 \Rightarrow c_1=-3$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$y = -3x^4$$

مثال ٨: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = 2xy^2$ حيث $y(2) = 1$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + c$$

$$-y^{-1} = \frac{2x^2}{2} + c \Rightarrow y^{-1} = -\left(x^2 + c\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

بتعويض $y = 1,\ x = 2$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c

$$1 = -(4 + c) \Rightarrow 1 = -4 - c \Rightarrow c = -5$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$y = \frac{1}{5 - x^2}$$

مثال ٩ : حل المعادلة التفاضلية التالية: $e^y y' = 4$ حيث $y(0) = 2$

الحل: $e^y \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \int e^y dy = \int 4dx + c \Rightarrow e^y = 4x + c$

بتعويض $y = 2,\ x = 0$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c

$$y(0) = 2 \Rightarrow e^2 = c \Rightarrow e^y = 4x + e^2 \Rightarrow \ln\left(e^y\right) = \ln\left(4x + e^2\right)$$

ومنه فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$y = \ln(4x + 7.34)$$

مثال ١٠: حل المعادلة التفاضلية التالية: $2(y-1)y' = e^x$ حيث $y(0) = -2$

الحل:

$$2(y-1)\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \int 2(y-1)dy = \int e^x dx + c$$

$$\frac{2(y-1)^2}{2} = e^x + c \Rightarrow (y-1)^2 = e^x + c$$

بتعويض $y = -2,\ x = 0$ في العبارة السابقة نحصل على قيمة الثابت c

$$y(0) = -2 \Rightarrow (-2-1)^2 = e^0 + c \Rightarrow c = 8$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة يكون كما يلي:

$$(y-1)^2 = e^x + 8 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{e^x + 8}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{e^{x}+8}+1$$

مثال ١١: حل المعادلة التفاضلية التالية: $2y' = y(y-2)$

الحل:

$$2y' = y(y-2) \Rightarrow \frac{2dy}{dx} = y(y-2) \Rightarrow \frac{2dy}{y(y-2)} = dx$$

نكامل طرفي المعادلة

$$\Rightarrow 2\int \frac{dy}{y(y-2)} = x + c \Rightarrow 2\int \frac{dy}{y(y-2)} = \int dx + c$$

لنحسب $\int \frac{dy}{y(y-2)}$ باستعمال تجزئة الكسور

لدينا

$$\frac{1}{y(y-2)} = \frac{k_1}{y} + \frac{k_2}{y-2}$$

حيث

$$k_1 = \left(\frac{1}{y-2}\right)\Bigg|_{y=0} = -\frac{1}{2},\ k_2 = \left(\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{y=2} = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\frac{1}{y(y-2)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-2}\right)$$

وبالتالي فإن $2\int \frac{dy}{y(y-2)} = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-2} = -\ln y + \ln(y-2)$

إذن

$$\ln\left(\frac{y-2}{y}\right) = x + c \Rightarrow \frac{y-2}{y} = e^{x+c} \Rightarrow y - 2 = ye^{x+c} \Rightarrow y\left(1 - e^{x+c}\right) = 2$$

$c_1 = e^{c}$ حيث ، $y = \frac{2}{1-e^{x+c}} = \frac{2}{1-c_1e^{x}},$

مثال ١٢: حل المعادلة التفاضلية التالية: $3y^2y' = \left(1+y^3\right)\cos x.$

الحل:

$$3y^2y' = \left(1+y^3\right)\cos x. \Rightarrow 3y^2dy = \left(1+y^3\right)\cos x dx \Rightarrow \frac{3y^2}{1+y^3}dy = \cos x dx$$

نكامل طرفين المعادلة فنحصل على:

$$\Rightarrow e^{\ln(1+y^3)} = e^{\sin x + c.} \Rightarrow \ln(1+y^3) = \sin x + c \ \int \frac{3y^2}{1+y^3}dy = \int \cos x dx + c$$

$$\Rightarrow 1 + y^3 = e^{\sin x + c} \Rightarrow y^3 = e^{\sin x + c} - 1$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة يعطى كما يلي

حيث $y = \sqrt[3]{c_1e^{\sin x} - 1},\quad c_1 = e^{c}$

مثال ١٣: حل المعادلة التفاضلية التالية $\cos^2 x\, y' = y^2(y-1)\sin x.$

الحل: $\cos^2 x\, y' = y^2(y-1)\sin x \Rightarrow \cos^2 x\, dy = y^2(y-1)\sin x\, dx$

بقسمة طرفي المعادلة على $y^2(y-1)\cos^2 x$ نحصل على:

$$\frac{dy}{y^2(y-1)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2(y-1)} = \tan x \sec x\, dx$$

نكامل طرفي المعادلة

$$\int \frac{dy}{y^2(y-1)} = \int \tan x \sec x\, dx + c$$

لدينا $\int \tan x \sec x\, dx = \sec x + c$

لنحسب $\int \frac{dy}{y^2(y-1)}$ باستعمال تجزئة الكسور

$$\frac{1}{y^2(y-1)} = \frac{k_1}{y} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{y-1}$$

نوحد المقامات ثم نضرب طرفي المعادلة في $y^2(y-1)$ فنحصل على

$$1 = k_1 y(y-1) + k_2(y-1) + k_3\left(y^2\right)$$

نعوض بـ $y=0$ $\quad y=0 \Rightarrow 1 = k_1 \times 0 + k_2(-1) + k_3 \times 0 \Rightarrow k_2 = -1,$

نعوض بـ $y=1$ $\quad y=1 \Rightarrow 1 = k_1 \times 0 + k_2 \times 0 + k_3 \times 1 \Rightarrow k_3 = 1,$

نعوض بـ $y=-1$ $\quad y=-1 \Rightarrow 1 = k_1 \times 2 + k_2 \times (-2) + k_3 \times 1 \Rightarrow 2k_1 = 1 + 2k_2 - k_3$,

$$\Rightarrow k_1 = 1 - 2 - 1 = -2,$$

إذن $\quad \frac{1}{y^2(y-1)} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y-1}$

وبالتالي $\quad \int \frac{dy}{y^2(y-1)} = -2\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dy}{y-1} = -2\ln y + y^{-1} + \ln(y-1) + c$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة يعطى كما يلي:

$$\ln\left(\frac{y-1}{y^2}\right) + y^{-1} = \sec x + c$$

تمارين

تمرين١ : حل المعادلات التفاضلية التالية :

$1) xdx - y^2dy = 0$	$8) \dfrac{dy}{dx} = \cos^2 5y.\sin 3x$	$15) \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{s^2 + 6s + 9}{t^2}$
$2)\ (1+x^2)y' = 3xy$	$9) \dfrac{dz}{dt} = z^3t^2$	$16) \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\tan t}{s \ln s}$
$3) \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy - y}{xy - x}$	$10) \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t \sin t}{\sqrt{x}}$	$17) y' = \dfrac{x^2}{y-1}$
$4) xdx - y^3dy = 0$	$11) sds + s^3(\theta^2 - 3)d\theta = 0$	$18) \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+1}{y-1}$
$5) y^4y' = x + 1$	$12) x' = x^2t + x^2$	$19) y' = \dfrac{x^3 + 7}{y^9 - 3y^4}$
$6) y' = (x+1)/y$	$13) xx' = (1-t)^2$	$20) \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{te^t}{\csc x}$
$7) yy' = \dfrac{2x^3}{1+y^2}$	$14) x^{-2}dx + (y+1)^2 dy = 0$	$21)\ xy' - 2xy = xe^{3x}$

تمرين ٢ : حل المعادلات التفاضلية المشار إليها ذات القيم الابتدائية المعطاة

$1) \dfrac{dy}{dx} = -2yt^2, y(2) = 3$

$2) 4xdy - ydx = x^2dy, y(5) = -1$

$3) x^2(y+1)dx = y^2(x-1)dy = 0, y(-1) = 2$

$4) \dfrac{dx}{dt} = x^2 - x^3, x(1) = 2$

$5) s' = (t^2 + s^2)/st, s(1) = -2$

المعادلات التفاضلية المتجانسة

مقدمة

قسم من المعادلات التفاضلية والتي تكون غير قابلة لفصل المتغيرات في الأصل تصبح قابلة لفصل المتغيرات بعد تحويل المتغير .

مجموعة من المعادلات من هذا النوع هي المعادلات التي يمكن كتابتها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

هذا النوع من المعادلات يصبح قابل لفصل المتغير وذلك بوضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن $y=vx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dy}{dx}+v$ وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرات. وطريقة حلها تتم كما يبين المثال التالي:

مثال ١ : حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy'=y-x\ \ e^{y/x}$

الحل: $xy'=y-x\ \ e^{y/x}$

بقسمة طرفي المعادلة على x نحصل على

$$y'=\frac{y}{x}-e^{y/x}$$

بوضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن $v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y'=x\dfrac{dv}{dx}+v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v-e^{v}\Rightarrow -e^{-v}dv=\frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين

$$\int -e^{-v}dv=\int\frac{dx}{x}+c$$

$$\Rightarrow e^{-v}=\ln x+c\Rightarrow \ln(e^{-v})=\ln(\ln x+c)\Rightarrow -v=\ln(\ln x+c)$$

نعوض الآن $v=\dfrac{y}{x}$ نحصل على:

$$-\frac{y}{x}=\ln(\ln x+c)\Rightarrow y=-x\ln(\ln x+c)$$

تعريف ١

نقول عن المعادلات التفاضلية التي تكتب من الشكل :

$N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=M(x,y)$ حيث M,N دوال متجانسة من نفس الدرجة

أنها معادلات تفاضلية متجانسة

ويمكن كتابتها من الشكل : $\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{x}{y}\right)$ وبالتالي بعد تحويل المتغير تصبح قابلة لفصل المتغيرات.

تعريف ٢

نقول أن الدالة $g(x,y)$ المعرفة من أجل كل قيم (x,y) أنها متجانسة من الدرجة m إذا كان:

$g(tx,ty)=t^m g(x,y)$ من أجل كل قيم (x,y)

مثال ٢ : لتكن الدالة $g(x,y)=x^3y^2-3x^5$

نلاحظ أن:

$$g(tx,ty)=(tx)^3(ty)^2-3(tx)^5=t^5(x^3y^2-3x^5)=t^5g(x,y)$$

وبالتالي $g(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة الخامسة

مثال ٣: الدالة $h(x,y)=x^3y-3x^2$ ليست بدالة متجانسة

وفي ما يلي نتطرق إلى طريقة الحل لمثل هذا النوع من المعادلات

مثال ٤ : حل المعادلة التفاضلية التالية: $2x^2\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$

الحل: لدينا $N(x,y)=2x^2,\ M(x,y)=x^2+y^2$

$$N(tx,ty)=2(tx)^2=2t^2x^2=t^2N(x,y),$$
$$M(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2(x^2+y^2)=t^2M(x,y)$$

ومنه فإن الدوال M,N دوال متجانسة من الدرجة الثانية

إذن المعادلة التفاضلية السابقة يمكن كتابتها من الشكل: $\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{x}{y}\right)$ وطريقة حلها تعطى كما يلي:

بقسمة طرفي المعادلة على x^2 نحصل على

$$2\frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

نضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن $y=vx\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dy}{dx}+v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على: $2x\dfrac{dv}{dx}+2v=1+v^2$

$$\Rightarrow 2x\frac{dv}{dx}=v^2-2v+1\Rightarrow\frac{2dv}{(v-1)^2}=\frac{dx}{x}.$$

نكامل الطرفين

$$2\int(v-1)^{-2}dv=\int\frac{dx}{x}+c$$

$$\Rightarrow -(v-1)^{-1}=\frac{1}{2}(\ln x+c)\Rightarrow -(v-1)=\frac{2}{\ln x+c}\Rightarrow v=\frac{-2}{(\ln x+c)}+1$$

نعوض الآن $v=\dfrac{y}{x}$ نحصل على: $\dfrac{y}{x}=1-\dfrac{2}{\ln x+c}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي: $y=x-\dfrac{2x}{\ln x+c}$

مثال ٥: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y'=xy-y^2$

الحل: يمكن التأكد بسهولة أن الدوال $M=xy-y^2, N=x^2$ دوال متجانسة من الدرجة الثانية وحل المعادلة يكون كما يلي:

بقسمة طرفي المعادلة على x^2 نحصل على

$$y'=\frac{xy}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

بوضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن $v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y'=x\dfrac{dv}{dx}+v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}+v=v-v^2\Rightarrow -\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين

$$-\int\frac{dv}{v^2}=\int\frac{dx}{x}+c$$

$$\Rightarrow v^{-1}=\ln x+c\Rightarrow v=\frac{1}{\ln x+c}$$

نعوض الآن $v=\dfrac{y}{x}$ نحصل على: $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\ln x+c}\Rightarrow y=\dfrac{x}{\ln x+c}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي: $y=\dfrac{x}{\ln x+c}$

مثال ٦: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y'=y^2-2xy$

الحل: بقسمة طرفي المعادلة على x^2 نحصل على

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}$$

بوضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن $v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y'=x\dfrac{dv}{dx}+v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v^2-2v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=v^2-3v=v(v-3)\Rightarrow\frac{dv}{v(v-3)}=\frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين

$$\int \frac{dv}{v(v-3)} = \int \frac{dx}{x} + c$$

ولنحسب $\int \frac{dv}{v(v-3)}$ بتجزئة الكسور

$$\int \frac{dv}{v(v-3)} = k_1 \int \frac{dv}{v} + k_2 \int \frac{dv}{v-3}$$

حيث $k_1 = \left(\frac{1}{v-3}\right)_{v=0} = -\frac{1}{3},\ k_2 = \left(\frac{1}{v}\right)_{v=3} = \frac{1}{3}$

ومنه

وبالتالي فإن $\int \frac{dv}{v(v-1)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v-1} = -\frac{1}{3}\ln v + \frac{1}{3}\ln(v-1) = \ln \sqrt[3]{\frac{v-1}{v}}$

$$\ln \sqrt[3]{\frac{v-1}{v}} = \ln x + c$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{v-1}{v}} = c_1 x \Rightarrow v - 1 = v{c_1}^3 x^3 \Rightarrow v(1 - {c_1}^3 x^3) = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{1 - {c_1}^3 x^3}$$

نعوض الآن $v = \frac{y}{x}$ نحصل على: $\frac{y}{x} = \frac{1}{1 - {c_1}^3 x^3}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي: $y = \frac{x}{1 - c_2 x^3}$ حيث $c_2 = e^{3c}$

مثال ٧: حل المعادلة التفاضلية التالية: $xyy' = 2y^2 - x^2$

الحل: بقسمة طرفي المعادلة على xy نحصل على

$$y' = \frac{2y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy} \Rightarrow y' = 2\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

بوضع $v = \frac{y}{x}$ نجد أن $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = x\frac{dv}{dx} + v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx} + v = 2v - \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{xdv}{dx} = v - \frac{1}{v} = \frac{v^2 - 1}{v} \Rightarrow \frac{v}{v^2 - 1}dv = \frac{1}{x}dx$$

بتكامل الطرفين

$$\int \frac{vdv}{v^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(v^2 - 1) = \ln x + c$$

$$\Rightarrow \ln(v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \ln x + c \Rightarrow (v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = c_1 x^2, \qquad c_1 = e^c$$

$$\Rightarrow v^2 - 1 = c_2 x^2 \Rightarrow v^2 = c_2 x^2 + 1 \Rightarrow v = \pm\sqrt{c_2 x^2 + 1} \quad , \quad c_2 = {c_1}^2$$

نعوض الآن نحصل على: $v = \dfrac{y}{x}$ $\quad \dfrac{y}{x} = \pm\sqrt{c_2 x^2 + 1} \Rightarrow y = \pm x\sqrt{c_2 x^2 + 1}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي:

$$y = \pm x\sqrt{c_2 x^2 + 1}$$

مثال ٨: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = \dfrac{y}{x} - 3\left(\dfrac{y}{x}\right)^{4/3}$

الحل: بوضع $v = \dfrac{y}{x}$ نجد أن $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = x\dfrac{dv}{dx} + v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx} + v = v - 3(v)^{4/3} \Rightarrow -3(v)^{-4/3}\,dv = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين $\int -3(v)^{-4/3}\,dv = \int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow v^{-1/3} = \ln x + c$

$$\Rightarrow v^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\ln x + c} \Rightarrow v = \frac{1}{(\ln x + c)^3}$$

نعوض الآن $v = \dfrac{y}{x}$ نحصل على: $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{(\ln x + c)^3}$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي:

$$y = \frac{x}{(\ln x + c)^3}$$

مثال ٩: حل المعادلة التفاضلية التالية: $3xy^2 y' = 4y^3 - x^3$

الحل: بقسمة طرفي المعادلة على $3xy^2$ نحصل على $y' = \dfrac{4}{3}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

بوضع $v = \dfrac{y}{x}$ نجد أن $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = x\dfrac{dv}{dx} + v$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{4}{3}v - \frac{1}{3}\frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}\left(v - \frac{1}{v^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{v^3 - 1}{v^2}\right) \Rightarrow \frac{3v^2}{v^3 - 1}\,dv = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين

$$\int \frac{3v^2 dv}{v^3 - 1} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \ln(v^3 - 1) = \ln x + c$$
$$\Rightarrow v^3 - 1 = c_1 x \Rightarrow v^3 = c_1 x + 1 \Rightarrow v = \sqrt[3]{c_1 x + 1}, \quad c_1 = e^c$$

نعوض الآن $v = \frac{y}{x}$ نحصل على:

$$\frac{y}{x} = \sqrt[3]{c_1 x + 1} \Rightarrow y = x\sqrt[3]{c_1 x + 1}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بما يلي:

$$y = x\sqrt[3]{c_1 x + 1}$$

تمارين

تمرين: حل المعادلات التفاضلية التالية

$1)\, y' = \dfrac{y + x}{x}$	$4)\, y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$	$7)\, xdy - ydx = (x - y^2)dx = 0$
$2)\, y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$	$5)\, y^2 dx - xydy + x^2 dx = 0$	$8)\, (2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$
$3)\, y' = (x^2 + y^2)/xy$	$6)\, y' = \dfrac{x^4 + 3x^2 y^2 + y^4}{x^3 y}$	$9)\, (1 + 2e^{x/y})dx + 2e^{x/y}(1 - \dfrac{x}{y})dy = 0$

المعالة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

تعريف

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى إنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

حيث $p(x), q(x)$ دوال في x

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى يعطى من الشكل:

$$y = e^{-I(x)}\left(\int e^{I(x)} q(x)dx + c\right)$$

حيث $I(x) = \int p(x)dx$ و c عدد ثابت

مثال ١: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y' + 3y = 20$

الحل: $y' + 3y = 20$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $p(x) = 3, \ \ q(x) = 20$

ومنه $I(x) = \int p(x)dx = 3x$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي: $y = e^{-3x}\left[20\int e^{3x}dx + c\right]$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y = e^{-3x}\left[\frac{20}{3}e^{3x} + c\right] == \frac{20}{3} + ce^{-3x}$$

مثال ٢: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y' + \frac{1}{x}y = x^3$

الحل: $y' + \frac{1}{x}y = x^3$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $p(x) = \frac{1}{x}, \ \ q(x) = x^3$

ومنه $I(x) = \int p(x)dx = \ln x$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي:

$$y = e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}x^3dx + c\right) = \frac{1}{x}\left[\int x^4dx + c\right]$$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y = \frac{1}{x}\left[\frac{x^5}{5} + c\right] = \frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}$$

مثال ٣: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $xy' + y = x^2$

الحل: $xy' + y = x^2$

بقسمة طرفي المعادلة على x فيكون لدينا

$$y + \frac{1}{x}y = x$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $p(x) = \frac{1}{x}, \ \ q(x) = x$

ومنه $I(x) = \int p(x)dx = \ln x$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي:

$$y = e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x} x dx + c\right) = \frac{1}{x}\left[\int x^2 dx + c\right]$$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y = \frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2} + c\right] = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}$$

مثال ٤: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $xy' - 2y = x^3 e^{3x}$

الحل: $xy' - 2y = x^3 e^{3x}$

بقسمة طرفي المعادلة على x فيكون لدينا

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^{3x}$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $p(x) = -\frac{2}{x},\ \ q(x) = x^2 e^{3x}$

ومنه $I(x) = \int p(x) dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2\ln x = \ln x^{-2}$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي:

$$y = e^{-\ln\frac{1}{x^2}}\left[\int e^{\ln\frac{1}{x^2}} x^2 e^{3x} dx + c\right] = x^2\left[\int e^{3x} dx + c\right]$$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y = x^2\left[\frac{1}{3}e^{3x} + c\right] = \frac{x^2}{3}e^{3x} + cx^2$$

مثال ٥: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $xy' + 3y = \frac{1}{x}$

الحل: $xy' + 3y = \frac{1}{x}$

بقسمة طرفي المعادلة على x فيكون لدينا

$$y' + \frac{3}{x} y = \frac{1}{x^2}$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $p(x) = \frac{3}{x},\ \ q(x) = \frac{1}{x^2}$

ومنه $I(x)=\int p(x)dx=3\int\frac{dx}{x}=3\ln x=\ln x^3$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي:

$$y=e^{-\ln x^3}\left[\int e^{\ln x^3}\ \tfrac{1}{x^2}\,dx+c\right]=\tfrac{1}{x^3}\left[\int xdx+c\right]$$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y=\frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2}{2}+c\right]$$

مثال ٦ : حل المعادلة التفاضلية الآتية: $y'+2y=\sin x$

الحل: نلاحظ أن هذه المعادلة تكتب من الشكل

$y'+p(x)y=q(x)$ حيث $q(x)=\cos x$ و $p(x)=2$

نضع $I(x)=\int p(x)dx=2x$

والحل العام لها يعطى كما يلي

$$y=e^{-I(x)}\left(\int e^{I(x)}q(x)dx+c\right)$$

إذن $y=e^{-2x}\left(\int e^{2x}\sin xdx+c\right)$

لنحسب $\int e^{2x}\sin xdx$ باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}\sin xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos xdx$$

لنحسب $\int e^{2x}\cos xdx$ باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int e^{2x}\cos xdx=\frac{1}{2}\cos xe^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin xdx$$

إذن $\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}\sin xe^{2x}-\frac{1}{4}\cos xe^{2x}-\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin xdx$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{4}+1\right)\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin xdx=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x}$$

$$\Rightarrow\int e^{2x}\sin xdx=\frac{2}{5}\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x}$$

وبالتالي فان $y=ce^{-2x}+\frac{2}{5}e^{-2x}\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)e^{2x}$

والحل العام للمعادلة التفاضلية يعطى كما يلي:

$$y = ce^{-2x} + \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)$$

للتحقق من الحل نحسب المشتقة الأولى لـ y ثم نعوض المعادلة التفاضلية الأصلية

$$y' = -2ce^{-2x} + \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)$$

$$y' + 2y = -2ce^{-2x} + \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x) + 2ce^{-2x} + \frac{2}{5}(2\sin x - \cos x)$$

$$= \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)\sin x = \sin x = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

مثال٧: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $y(1) = 4$ ، $y' + \frac{2}{x}y = 4x,$

الحل: $y' + \frac{2}{x}y = 4x$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

حيث $P(x) = \frac{2}{x}, q(x) = 4x$

ومنه $I(x) = \int p(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x = \ln x^2$

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كما يلي:

$$y = e^{-\ln x^2}\left[4\int e^{\ln x^2} x dx + c\right] = x^2\left[4\int x^3 dx + c\right]$$

بحساب التكامل في الطرف الأيمن نحصل على:

$$y = x^{-2}\left[\frac{4x^4}{4} + c\right] = x^2 + cx^{-2}$$

لدينا $y(1) = 4$ بالتعويض في المعادلة السابقة بالقيم $y = 4, x = 1$ نحصل على قيمة الثابت c

$$y = 4, x = 1 \Rightarrow 4 = 1 + c \Rightarrow c = 3$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة المعطاة يكون كما يلي:

$$y = x^2 + 3x^{-2}$$

تمارين

تمرين ١ : حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $xy' = xe^{x^3} - 2y$	6) $y' + 2xy = 4x$	11) $\dfrac{dq}{dt} + 0.04q = 3.2e^{-0.04t}$
2) $(e^{-x} - 1)y' + e^x y = 0$	7) $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{3}{100-t}q = 2$	12) $\dfrac{dv}{dt} + 2v\cos t = \sin^2 t\cos t$
3) $\sin t y' = y\cos t$	8) $x\dfrac{dy}{dt} - 2y = x^3\cos 4x$	13) $y' + \dfrac{y}{x} = 5\cos 3x^2$
4) $x\dfrac{dy}{dt} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$	9) $\dfrac{dI}{dt} + 20I = \sin 2t$	14) $xy' + 2y = xe^{x^3}$
5) $y' + \dfrac{4}{x}y = x^4$	10) $v' - \dfrac{5}{x}v = -5x^2$	15) $y' + x^2 y = x^2 e^{\frac{2}{3}x^3}$

تمرين ٢ : حل المعادلات التفاضلية التالية ذات الشروط الابتدائية المعطاة:

13) $y' - x^3 y = -4x^3, \quad y(0) = 6$

14) $y' - y\cot x = 2x\cos x, \quad y(0) = -1$

15) $y' - y = e^x, \quad y(1) = 0$

16) $y' + 2xy = x, \quad y(1) = e$

الفصل الثاني : تطبيقات كهربائيه عن المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

تذكرة بالقوانين الكهربائية

١) فرق الجهد V لدائرة كهربائية تحتوي على مقاومة R

$$V_R = Ri$$

حيث R المقاومة مقاسة بـ Ohms و i شدة التيار مقاس بـ Amperes و فرق الجهد V بـ Volts

2) فرق الجهد V لدائرة كهربائية تحتوي على ملف L

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

حيث L الملف مقاس بـ Henrys و i شدة التيار مقاس بـ Amperes و V بـ Volts

3) فرق الجهد V لدائرة كهربائية تحتوي على مكثفة C

$$V_C = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

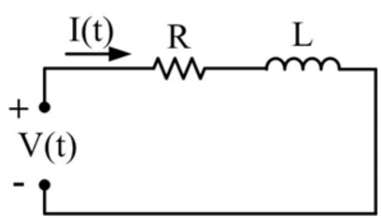
حيث C ثابت الملف مقاس بـ Farads و q الشحنة الكهربائية مقاسة بـ Coulombs

ولدينا أيضا $i(t) = \dfrac{dq}{dt},\ q(t) = \int i(t)dt$

قانون كرشوف Kirchoff``s Voltage Law(KVL)

فرق الجهد بين نقطتين في دائرة مغلقة يساوي مجموع فروق الجهد في باقي الدائرة

I) **دائرة كهربائية تحتوي مقاومة R وملف L** R-L Circuit



المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V(t) = V_R + V_L$$

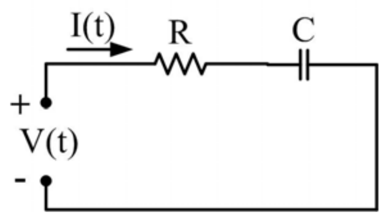
$$\Rightarrow V(t) = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow i' + \frac{R}{L}i = \frac{1}{L}V(t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطى بما يلي

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{1}{L}V(t)dt + c\right]$$

II) **دائرة كهربائية تحتوي مقاومة** R **ومكثفة** C R-C Circuit



المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$V_R + V_C = V$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{V(t)}{R}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطى بما يلي

$$q = e^{-\frac{1}{RC}t}\left[\int e^{\frac{1}{RC}t}\frac{V(t)}{R}dt + c\right]$$

مثال ١

ليكن لدينا دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V = 20$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 20$ Ohms و ملف $L = 2$ Henrys وشدة التيار الابتدائية $i(0) = 0$ Amperes أوجد شدة التيار عند اللحظة $t = 0.1$S

الحل :

المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

$$L = 2\ ,\ \ R = 20,\ \ \ V = 20$$

$$\Rightarrow i' + 10i = 10\ \ 2i' + 20i = 20$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطى بما يلي

$$q = e^{-10t}\left[\int 10e^{10t}dt + c\right] = 1 + ce^{-10t}$$

لدينا $i(0) = 0$

لإيجاد قيمة الثابت نعوض في عبارة $i(t)$ بـ $i = 0, t = 0$

$$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

إذن عبارة شدة التيار تعطى بما يلي

$$i(t) = 1 - e^{-10t}$$

وشدة التيار عند $t = 0.1$Seconds هي

$$i(0.1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = 0.632\,Ampers$$

مثال ٢ :

ليكن لدينا دائرة كهربائية R-C ذات فرق الجهد $V = 50Volts$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 10\Omega(Ohms)$ و مكثفة $C = 0.003\,Farads$ ولتكن الشحنة الكهربائية الابتدائية $q(0) = 0\ Colombs$ أوجد عبارة الشحنة الكهربائية

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$R = 10\Omega, C = 0.003\,Farads, E = 50Volts$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t)$$

$$10q' + \frac{1}{3\times10^{-3}}q = 50$$

ومنه

$$q' + \frac{1}{3\times10^{-4}}q = 5$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطى بما يلي

$$q(t) = e^{-\frac{1}{3\times10^{-4}}t}\left[5\int e^{\frac{1}{3\times10^{-4}}t}dt + c\right]$$

$$= 15\times10^{-4} + ce^{-\frac{1}{3\times10^{-4}}t}$$

لدينا $q(0) = 0$ ، لإيجاد قيمة الثابت نعوض في عبارة $q(t)$ ب $q = 0, t = 0$

$$q(0) = 0 \Rightarrow 0 = 15\times10^{-4} + c \Rightarrow c = -15\times10^{-4}$$

ومنه فإنعبارة الشحنة الكهربائية

$$q(t) = 15\times10^{-4}(1 - e^{-\frac{1}{3\times10^{-4}}t}).$$

تمارين

تمرين ١

ليكن لدينا دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V(t) = 110Volts$ تحتوي على مقاومة $R = 100\,Ohms$

و ملف $L = 2.5\,Henrys$ وشدة التيار الابتدائية $i(0) = 0$ Amperes

أ) أدرس شدة التيار في الحالة الخاصة وذلك عندما يكون فرق الجهد عدداً ثابتاً

ب) أوجد الزمن اللازم لتغير شدة التيار من ٠ إلى 0.6 Amperes ثم أوجد الزمن الثابت

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i' + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} V(t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطى بما يلي

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int e^{\frac{R}{L}t} \frac{1}{L} V(t)dt + c\right]$$

وبما أن فرق الجهد ثابت $V = V_0$ إذن

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} dt + c\right] = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_0}{L}\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} dt + c\right] = \frac{V_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$$

لدينا $i(0) = 0$

لإيجاد قيمة الثابت نعوض في عبارة $i(t)$ بـ $i = 0, t = 0$

$$i(0) = \frac{V_0}{R} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{V_0}{R}$$

إذن
$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

لدينا $R = 100 Ohms,\ L = 2.5 henrys,\ V(t) = 110 Volt$

إذن عبارة شدة التيار تعطى بما يلي:

$$i(t) = \frac{110}{100}\left(1 - e^{-\frac{100}{2.5}t}\right) = 1.1\left(1 - e^{-40t}\right)$$

الزمن اللازم لتغير شدة التيار من ٠ إلى 0.٦ Amperes بما أن $i(0) = 0$ إذن

$$1.1\left(1 - e^{-40t}\right) = 0.6$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-40t} = \frac{0.6}{1.1} \Rightarrow -e^{-40t} = -1 + \frac{0.6}{1.1}$$

$$\Rightarrow e^{-40t} = \frac{0.5}{1.1} \Rightarrow -40t = \ln\frac{.5}{1.1}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{40}\ln\frac{0.5}{1.1} = \frac{1}{40}\ln\frac{1.1}{0.5} = 0.02\, Seconds$$

والزمن الثابت

$$\tau_L = L/R = \frac{2.5}{10^2} = 2.5 \times 10^{-2}\, Seconds$$

تمرين ٢

لتكن قيمة الملف $L = 10 henrys$ في دائرة R-L . فما هي القيمة التي تأخذها المقاومة R إذا افترضنا أن شدة التيار تأخذ ٩٩٪ من قيمتها النهائية عند $t = 1 Seconds$? ، باقتراض أن فرق الجهد ثابت والقيمة الابتدائية لشدة التيار معدومة $i(0) = 0$

الحل: من التمرين ١ فإن عبارة شدة التيار حين يكون فرق الجهد عدداً ثابتاً تعطى بما يلي

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

للحصول على القيمة النهائية لشدة التيار نؤول t إلى ما لا نهاية

$$i(\infty) = \lim_{t\to\infty} \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right] = \frac{V_0}{R}\left[1 - \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{R}{L}t}\right] = \frac{V_0}{R}$$

عند الزمن $t = 1 Seconds$ شدة التيار تساوى ٩٩٪ من $i(\infty)$ إذن

$$i(1) = 0.99\, i(\infty) = 0.99 \frac{V_0}{R}$$

$$i(1) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}}\right] = 0.99 \frac{V_0}{R}$$

باختصار $\frac{V_0}{R}$ من طرفي المعادلة

$$1 - e^{-\frac{R}{L}} = 0.99 \Rightarrow -e^{-\frac{R}{L}} = -0.01$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{L} = \ln 0.01 \Rightarrow R = -L \ln 0.01$$

نعوض $L = 10 henrys$ فنحصل على قيمة المقاومة

$$R = -10 \ln 0.01 = -10 \ln 10^{-2} = 20 \ln 10 = 46.05\, Ohms$$

تمرين ٣

أوجد شدة التيار $i(t)$ داخل دائرة كهربائية" R-L عندما تكون قيمة المقاومة $R = 1 Ohms$ والملفوفة $L = 1 henry$ و شدة التيار الابتدائية $I(0) = 0 Ampers$ وفرق الجهد يعطى بما يلي

$$V(t) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \le t \le 3 \\ 0 & if \quad t > 3 \end{cases}$$

بافتراض أن شدة التيار دالة مستمرة عند النقطة $t = 3$

الحل : عندما يكون $0 \le t \le 3$ فإن $V(t)=1$ ثابت وبالتالي فإن القانون السابق لشدة التيار في تمرين ١ يبقى صحيح وبالتالي فإن شدة التيار في هذه الفترة تعطى بما يلي

$$i_1(t)=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

وبالتعويض لقيم $V_0=1, R=1, L=1$ نحصل على عبارة شدة التيار في الفترة $0 \le t \le 3$

$$i_1(t)=1-e^{-t}$$

عندما يكون $t>3$ فإن $V=V_0=0$ وبالتالي فإن

$$i_2(t)=e^{-\frac{R}{L}(t-3)}\left(\int e^{-\frac{R}{L}(t-3)}\frac{V}{L}dt+c\right)$$

نعوض ب $V=V_0=0\ , R=1, L=1$ فنحصل على عبارة شدة التيار في الفترة $t>3$

$$i_2(t)=e^{-(t-3)}(k+c)=c_1 e^{-(t-3)},\ c_1=k+c$$

وبما أن شدة التيار دالة مستمرة عند النقطة $t=3$ فإن

$$i_1(3)=i_2(3)$$

إذن $c_1=1-e^{-3}$

وبالتالي فإن $$i_2(t)=\left(1-e^{-3}\right)e^{-(t-3)}$$

ومنه فإن عبارة شدة التيار تعطى بما يلي

$$i(t)=\begin{cases}1-e^{-t} & if \quad 0 \le t \le 3\\ \left(1-e^{-3}\right)e^{-(t-3)} & if \quad t>3\end{cases}$$

تمرين ٤

أوجد شدة التيار $i(t)$ داخل دائرة كهربائية R-C إذا كان فرق الجهد $V=100Volts$ والمكثفة $C=0.25Farads$ و شدة التيار الابتدائية $I(0)=1Ampers$ وقيمة المقاومة متغيرة وتعطى بما يلي

$$R=\begin{cases}100-t & if \quad 100 \ge t \ge 0\\ 0 & if \quad t>100\end{cases}$$

الحل: المعادلة المعبرة عن شدة التيار في دائرة R-C هي

$$i'+\frac{1}{RC}i=\frac{1}{R}V'$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطي كما يلي

$$i(t)=e^{-\frac{1}{RC}t}\left[\int e^{\frac{1}{RC}t}\frac{V'}{R}dt+c\right]$$

نلاحظ أن فرق الجهد ثابت $V = 100$ وبالتالي فإن $V' = 0$ ومنه فإن

$$i(t) = ce^{-\frac{1}{RC}t}$$

وبما أن $i(0) = 1$ إذن لإيجاد قيمة الثابت c نعوض في العبارة السابقة بـ $t = 0$ $i = 1,$

$$i(0) = 1 \Rightarrow ce^{0} = 1 \Rightarrow c = 1$$

ومنه فإن $i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}$

بالتعويض بقيم $C = 0.25Farads$ و $R = \begin{cases} 100 - t \text{ if } & 100 \geq t \geq 0 \\ 0 & \text{if } \ t > 100 \end{cases}$ نحصل على عبارة شدة التيار وهي

$$i(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{0.25(100-t)}t} & \text{if } 0 \leq t \leq 100 \\ 0 & \text{if } t > 100 \end{cases}$$

تمرين ٥

أوجد عبارة الشحنة الكهربائية داخل دائرة كهربائية R-C إذا كان فرق الجهد $V(t) = 1 - e^{-t} Volts$ والمكثفة $C = 10^{-3} Farads$ وقيمة المقاومة $R = 500\Omega$

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V(t)$$

نعوض بعبارة $V(t) = 1 - e^{-t} Volts$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 1 - e^{-t}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-t}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطي كما يلي

$$q = e^{-\frac{1}{RC}t}\left[\int e^{\frac{1}{RC}t}.\frac{1}{R}\left(1 - e^{-t}\right)dt + c_1\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{RC}t}\left[\frac{1}{R}\left(\int e^{\frac{1}{RC}t}dt - \int e^{t\left(\frac{1}{RC} - 1\right)}dt + c_1\right)\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{RC}t}\left[\frac{1}{R}\left(RC\,e^{\frac{1}{RC}t}-\frac{RC}{1-RC}e^{t\left(\frac{1}{RC}-1\right)}\right)+c_1\right]$$

$$=C-\frac{C}{1-RC}e^{-t}+c_1e^{-\frac{1}{RC}t}$$

نعوض بقيمتي R, C فنحصل على عبارة الشحنة الكهربائية

$$q(t)=10^{-3}-\frac{10^{-3}}{1-.5}e^{-t}+c_1e^{-\frac{1}{.5}t}$$

$$=-2\times10^{-3}e^{-t}+c_1e^{-2t}+10^{-3}$$

تمرين ٦

أوجد عبارة الشحنة الكهربائية داخل دائرة كهربائية" R-C إذا كان فرق الجهد $V(t)=125\sin t$ والمكثفة $C=0.04\,Farads$ وقيمة المقاومة $R=50\Omega$

الحل

المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=V(t)$$

نعوض بعبارة $V(t)=125\sin t$

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=125\sin t$$

$$\Rightarrow\frac{dq}{dt}+\frac{1}{0.04\times50}q=\frac{1}{50}125\sin t$$

$$\Rightarrow\frac{dq}{dt}+0.5q=2.5\sin t\Rightarrow q'+0.5q=2.5\sin t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وحلها العام يعطي كما يلي

$$q=e^{-0.5t}\left[2.5\int e^{0.5t}\sin t\,dt+c\right]$$

نحسب $\int e^{0.5t}\sin t\,dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int e^{0.5t}\sin t\,dt=2\sin t\,e^{0.5t}-2\int e^{0.5t}\cos t\,dt$$

ولنحسب $\int e^{0.5t}\cos t\,dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة أيضا

$$\int e^{0.5t}\cos t\,dt=2\cos t\,e^{0.5t}+2\int e^{0.5t}\sin t\,dt$$

إذن
$$\int e^{0.5t}\sin t\,dt=2\sin t\,e^{0.5t}-4e^{0.5t}\cos t-4\int e^{0.5t}\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow \int e^{0.5t}\sin t dt = \frac{2}{5}e^{0.5t}(\sin t - 2\cos t)$$

نعوض $\int e^{0.5t}\sin t dt$ في عبارة $q(t)$

$$q(t) = e^{-0.5t}\left[\frac{2}{5}e^{0.5t}\left(\sin t - 2\cos t\right) + c\right]$$

ومنه فإن عبارة الشحنة الكهربائية

$$q(t) = \frac{2}{5}(\sin t - 2\cos t) + ce^{-0.5t}$$

مسائل

تمرين ١

أوجد عبارة الشحنة الكهربائية داخل دائرة كهربائية R-C تحتوي على مكثفة $C = 0.04\,Farads$ ومقاومة $R = 50\Omega$ إذا كان فرق الجهد

(١) $V(t) = 110\cos 314t$

(٢) $V(t) = 110\cos 2t + 25\sin 2t + 200\cos 4t + 25\sin 4t$

(٣) $V(t) = 50e^{-t} + 1012\sin \pi t$

تمرين ٢

ليكن لدينا دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V(t) = 100\,Volts$ تحتوي على مقاومة $R = 40\,Ohms$ و ملف $L = 0.03\,Henrys$ وشدة التيار الابتدائية $i(0) = 0$ Amperes . أوجد الزمن اللازم عندما تبلغ شدة التيار ٩٩٪ من قيمتها النهائية.

تمرين ٣

إذا كانت الشحنة الكهربائية الابتدائية للمكثفة في دائرة كهربائية R-C هي $0.25\,C$ ، أوجد الشحنة عند الزمن $t = 0.2S$ إذا كان فرق الجهد $V = 110\,Volts$ ، والمقاومة $R = 2(Ohms)$ والمكثفة $C = 0.04\ Farads$

تمرين ٤

إذا كانت الشحنة الكهربائية الابتدائية للمكثفة في دائرة كهربائية R-C معدومة، أوجد عبارة الشحنة بدلالة الزمن إذا كان فرق الجهد $V = 6\,Volts$ ، والمقاومة $R = 20(Ohms)$ والمكثفة $C = 0.01\ Farads$

تمرين ٥

في دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V = 110\,Volts$ تحتوي على مقاومة $R = 10(Ohms)$ وملف $L = 3.2\,Henrys$ و $i(0) = 0$ ، أوجد عبارة شدة التيار بدلالة الزمن.

تمرين ٦

في دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V = 50\cos 2t\ Volts$ تحتوي على مقاومة $R = 40(Ohms)$ وملف $L = 2\,Henrys$ ، أوجد عبارة شدة التيار بدلالة الزمن. بافتراض أن شدة التيار الابتدائية معدومة.

تمرين ٧

إذا كان فرق الجهد $V = 200e^{-2t}\ Volts$ ، والمقاومة $R = 10(Ohms)$ والمكثفة $C = 0.01\ Farads$ في دائرة كهربائية R-C أوجد الشحنة عند الزمن $t = 1S$ إذا كانت الشحنة الكهربائية الابتدائية للمكثفة هي $0.25C$

تمرين ٨

في دائرة كهربائية R-L ذات فرق الجهد $V = 4\ Volts$ تحتوي على مقاومة $R = 2\ Ohms$ وملف $L = 0.06\ Henrys$ و $i(0) = 0$ ، أوجد شدة التيار الآنية عند الزمن $t = 0.01S$.

الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

تعريف

تسمي المعادلة (١) معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t) \quad (١)$$

بحيث y دالة في t و $p(t), q(t), r(t)$ دوال في t

تسمى الدوال $p(t), q(t)$ معاملات المعادلة التفاضلية (١)

ونقول عن هذه المعادلة إنها متجانسة إذا كان $r(t) \equiv 0$ أي أن $(r(t) = 0 \quad \forall t)$

مثال ١: المعادلة التالية هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

$$y'' + 2ty' + y = t^2$$

مثال ٢: لتكن المعادلة $y'' + yy' = 0$ هذه المعادلة ليست معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

مثال ٣: معادلة Euler-Cauchy التي تكتب على الشكل

$t^2 y'' + aty' + by = h(t)$ حيث a, b عددان ثابتان

هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

لأنه يمكن كتابتها على الشكل

$$y'' + \frac{at}{t^2}y' + \frac{b}{t^2}y = \frac{1}{t^2}h(t)$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{a}{t}y' + \frac{b}{t^2}y = \frac{1}{t^2}h(t)$$

أي أنها تكتب من الشكل $y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t)$ حيث $p(t) = \frac{a}{t}, q(t) = \frac{b}{t^2}, r(t) = \frac{1}{t^2}h(t)$

نظرية ١:

الحل العام للمعادلة (١) يكتب على الشكل : $y = y_h + y_p$

بحيث y_p هو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

و y_h هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة لها

مثال ٤: لتكن المعادلة التفاضلية الخطية التالية **:** (١) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

ولنعتبر الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة لها هو

$y_h = c_1e^x + c_2e^{3x}$ بحيث c_1, c_2 عددان ثابتان

١) تحقق من أن $y_p = \frac{2}{3}e^{-2x}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

٢) استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :

١) نحسب المشتقة الأولى والثانية لـ y_p ثم نعوض في المعادلة (١)

$$y_p = \frac{2}{3}e^{-2x} \Rightarrow y'_p = -\frac{4}{3}e^{-2x} \Rightarrow y''_p = \frac{8}{3}e^{-2x}$$

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{8}{3}e^{-2x} + \frac{16}{3}e^{-2x} + \frac{6}{3}e^{-2x} = \left(\frac{8}{3} + \frac{16}{3} + \frac{6}{3}\right)e^{-2x} = 10e^{-2x}$$

إذن $y_p = \frac{2}{3}e^{-2x}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية الغير المتجانسة

٢) الحل العام للمعادلة التفاضلية يكتب من الشكل

$$y = y_h + y_p = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-2x}$$

مثال ٥ : إذا علمت أن $y_h = a\cos t + b\sin t$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + y = 0 \quad (١)$$

فأوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + y = 1 \quad (٢)$$

الحل: نلاحظ أن $y_p = 1$ هو حال خاص للمعادلة التفاضلية (٢)

وأن $y_h = a\cos t + b\sin t$ الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة لها

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (٢) هو $y = y_h + y_p = a\cos t + b\sin t + 1$

تعريف:

نقول عن حلين خاصين للمعادلة التفاضلية المتجانسة y_1, y_2 إنهما يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة إذا كان المحدد التالي لا يطابق الصفر

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال ٦ : نعتبر المعادلة التفاضلية المتجانسة التالية

$$y'' - y = 0$$

و نعتبر الحلين الخاصين $y_1 = e^{t},\ y_2 = e^{-t}$

بما أن

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^t\left(-e^{-t}\right) - e^{-t}e^t = -1-1 = -2 \neq 0$$

ومنه فإن (y_1, y_2) يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة

مثال ٧: نعتبر المعادلة التفاضلية المتجانسة التالية

$$y'' + y = 0$$

ولنعتبر الحلين الخاصين $y_2 = \sin t, y_1 = \cos t$

بما أن

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

ومنه فإن (y_1, y_2) يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة.

نظرية ٢:

إذا كان لدينا (y_1, y_2) يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية المتجانسة فإن الحل العام لها يكون من الشكل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ بحيث c_1, c_2 عددان ثابتان

فالحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة في المثال ٦ هو $y = c_1e^t + c_2e^{-t}$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة في المثال٧ هو $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

تعريف ٣

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة هي من الشكل التالي :

$y'' + ay' + by = r(t)$ حيث a, b ثابتان و $r(t)$ دالة في t

ونقول عنها أنها متجانسة إذا كان $r(t) \equiv 0$

مثال ٨ : المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - y = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

مثال ٩ :المعادلة التفاضلية التالية

$$t^2 y'' - y = 0$$

ليست معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

لكن يمكن وضعها تحت ذلك الشكل بتحويل المتغير t إلى المتغير u والمتغير y إلى المتغير z

$$u = \ln t \Rightarrow z(u) = z(\ln t) = y(t) \Rightarrow z'(u) = \frac{1}{t} z'(\ln t) = y'(t)$$

$$\Rightarrow z'(u) = t y'(t)$$

$$z''(u) = -\frac{1}{t^2} z'(\ln t) + \frac{1}{t^2} z''(\ln t) = y''(t) \Rightarrow t^2 z''(u) = -z'(\ln t) + z''(\ln t) = t^2 y''(t)$$

$$\Rightarrow z''(u) = t^2 y''(t) + t y'(t) = t^2 y''(t) + z'(u)$$

إذن بالتعويض في المعادلة الأصلية تصبح المعادلة على الشكل

$$z'' - z' - z = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

نظرية ٣:

لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

$$y'' + ay + by = r(x) \quad (١)$$

لنحل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

$$y'' + ay + by = 0 \quad (٢)$$

ولنعتبر المعادلة المرفقة لها بـ $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

١) إذا كان للمعادلة جذران مختلفان λ_2, λ_1 فإن $\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right)$ يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

٢) إذا كان للمعادلة جذر مضاعف λ فان $\left(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\right)$ يشكلان أساسا لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

تحليل:

أولا : إذا كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان λ_2, λ_1 (المميز $\Delta > 0$) فإن

$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

ثانيا : إذا كان للمعادلة جذران تخيليان مختلفان λ_1, λ_2 أي أن $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta$

(المميز $\Delta < 0$) فإن

$y_h = c_1 e^{\alpha - iB} + c_2 e^{\alpha + iB}$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة ويمكن كتابته من الشكل

$$y_h = e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right)$$

ثالثا: إذا كان للمعادلة جذر مضاعف λ فإن

$y_h = e^{\lambda t}\left(c_1 + c_2 t\right)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة حيث A, B, c_1, c_2 ثوابت

مثال ١٠: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - y = 0$$

الحل : نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

مثال 11: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + y' - 2y = 0$$

الحل: نحل المعاجلة المرفقة لها

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

مثال ١٢: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

الحل : نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2 t\right)e^{-4t}$$

مثال ١٣: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

الحل : نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\times 10 = -36$$

$$\lambda_1 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i, \quad \lambda_2 = 1+3i \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 3$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = e^t\left(A\cos 3t + B\sin 3t\right)$$

ويمكن كتابة هذا الحل من الشكل

$$y_h = c_1 e^{(1-3i)t} + c_2 e^{(1+3i)t}$$

مثال ١٤ : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' = 0$$

الحل : نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = (c_1 + c_2 t)e^{0t} = c_1 + c_2 t$$

مثال 15 : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$8y'' + 2y' - y = 0$$

الحل :

$$8y''+2y'-y=0 \Rightarrow y''+\frac{2}{8}y'-\frac{1}{8}y=0 \Rightarrow y''+\frac{1}{4}y'-\frac{1}{8}y=0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{16} + \frac{4}{8} = \frac{1+8}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{3}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة هو

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{4}t}$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

نظرية ٤: القاعدة الأساسية Basic Rule

إذا كانت $r(t)$ هي إحدى الدوال التالية فإنه يمكن اختيار y_p المقابلة لها كما يلي ونحدد المعاملات المجهولة بالتعويض في المعادلة والمطابقة مع $r(t)$

(١) $r(t)=ke^{\alpha t} \Rightarrow y_p=ce^{\alpha t}$

(٢)

$$r(t)=k_nt^n+k_{n-1}t^{n-1}+\ldots+k_1t+k_0 \Rightarrow y_p=K_nt^n+K_{n-1}t^{n-1}+\ldots+K_1t+K_0,\ n\in \mathrm{N}$$

(٣)
$$\left.\begin{array}{l} r(t)=k\cos\omega t \\ \text{أو} \\ r(t)=k\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow y_p=K\cos\omega t+M\sin\omega t$$

(٤)
$$\left.\begin{array}{l} r(t)=ke^{\alpha t}\cos\omega t \\ \text{أو} \\ r(t)=ke^{\alpha t}\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow y_p=e^{\alpha t}\left(K\cos\omega t+M\sin\omega t\right)$$

بشرط ألا يكون y_p حلا خاصا للمعادلة المتجانسة أيضا

مثال ١٦: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y''+4y=8t^2$$

الحل :

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y''+4y=0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2+4=0$$
$$\Delta=0-4\times 4=-16$$
$$\lambda_1=\frac{0-4i}{2}=-2i,\ \lambda_2=2i \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=2$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y_h=e^{0t}\left(A\cos 2t+B\sin 2t\right)=A\cos 2t+B\sin 2t$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + 4y = 8t^2 \quad (١)$$

لدينا $r(t) = 8t^2$ إذن نختار $y_p(t) = k_1 t^2 + k_2 t + k_3$

$$y_p(t) = k_1 t^2 + k_2 t + k_3 \Rightarrow y'_p(t) = 2k_1 t + k_2 \Rightarrow y''_p(t) = 2k_1$$

نعوض في المعادلة (١)

$$y'' + 4y = 2k_1 + 4k_1 t^2 + 4k_2 t + 4k_3$$
$$= 4k_1 t^2 + 4k_2 t + (2k_1 + 4k_3) = 8t^2$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$4k_1 = 8 \Rightarrow k_1 = \frac{8}{4} = 2$$
$$4k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$
$$2k_1 + 4k_3 = 0 \Rightarrow 2 \times 2 + 4k_3 = 0 \Rightarrow 4k_3 = -4 \Rightarrow k_3 = -1$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = 2t^2 - 1$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = y_h + y_p = A\cos 2t + B\sin 2t + 2t^2 - 1$$

مثال ١٧: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

الحل :

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' - 3y' + 2y = e^t \quad (1)$$

لدينا $r(t) = e^t$ إذن نختار $y_p = ke^t$

$$y''_p = ke^t \Rightarrow y'_p = ke^t \Rightarrow y_p = ke^t$$

نعوض في المعادلة (١) $y'' - 3y' + 2y = ke^t - 3ke^t + 2ke^t = (k - 3k + 2k)e^t = 0 = 0e^t$

إذن هذا الحل هو حل خاص للمعادلة المتجانسة ونستطيع الحصول عليه مباشرة بأخذ $(c_1 = k, c_2 = 0)$ في الحل العام للمعادلة المتجانسة

ومنه لا يمكن إتمام الحل، فماذا يمكن أن نفعله في هذه الحالة وهو ما سوف نتطرق إليه في الفقرة المقبلة

نظرية ٥: قاعدة التغيير Modification Rule

إذا كان y_p المختار في النظرية السابقة هو حل خاص للمعادلة المتجانسة فإننا نختار مكانه

١) ty_p إذا كان للمعادلة المرفقة جذران مختلفان

٢) $t^2 y_p$ إذا كان للمعادلة المرفقة جذر مضاعف

يمكن لنا الآن تكملة المثال السابق باستعمال هذه النظرية

كما رأينا أن للمعادلة المرفقة جذران مختلفان إذن نختار y_p كما يلي

$$y_p = cte^t$$

$$y'_p = cte^t + ce^t = c(t+1)e^t \Rightarrow y''_p = c(t+1)e^t + ce^t \Rightarrow = c(t+2)e^t$$

نعوض الآن في المعادلة التفاضلية السابقة

$$y'' - 3y' + 2y = c(t+2)e^t - 3c(t+1)e^t + 2ce^t = [c(t+2) - 3c(t+1) + 2ct]e^t$$

$$= [ct + 2c - 3ct - 3c + 2ct]e^t = -ce^t$$

وبما أن $r(t) = e^t$

إذن يكون لدينا

$$-ce^t = e^t \Rightarrow -c = 1 \Rightarrow c = -1$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = -te^t$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية يكون كما يلي

$$y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} - te^t$$

مثال ١٨ : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

الحل :

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y'' - 2y' + y = 0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

إذن للمعادلة المرفقة جذر مضاعف $\lambda = 1$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو $y_h = (c_1 + c_2t)e^t$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' - 2y' + y = e^t \quad (١)$$

لدينا $r(t) = e^t$ وحسب نظرية الحل الخاص نختار y_p من الشكل $y_p = ce^t$

لكن هذا الحل هو حل خاص للمعادلة التفاضلية المتجانسة بوضع $(c_2 = 0,\ c_1 = c)$

وبما أن للمعادلة المرفقة جذر مضاعف إذن نختار الحل الخاص كما يلي

$$y_p = ct^2e^t$$

$$y_p' = 2cte^t + ct^2e^t = (ct^2 + 2ct)e^t$$

$$y_p'' = (2ct + 2c)e^t + (ct^2 + 2ct)e^t = c(t^2 + 4t + 2)e^t = (ct^2 + 4ct + 2c)e^t$$

نعوض في المعادلة (١)

$$y'' - 2y' + y = c(t^2 + 4t + 2)e^t - 2c(t^2 + 2t)e^t + ct^2e^t$$

$$= c(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 4t + t^2)e^t = 2ce^t$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$2ce^t = e^t \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = \frac{1}{2}t^2e^t$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$=e^t\left(c_1+c_2t+\frac{1}{2}t^2\right)\ y=y_h+y_p=e^t(c_1+c_2t)+\frac{1}{2}t^2e^t$$

نظرية ٦ : قاعدة المجموع Sum Rule

إذا كان y_{1_p} حل خاص للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=r_1(t)$

و y_{2_p} حل خاص للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=r_2(t)$

فإن $y_p=y_{1p}+y_{2p}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=r_1(t)+r_2(t)$

مثال ١٩: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y''-2y'+y=e^t+t$$

الحل :

١) في المثال السابق وجدنا الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y''-2y'+y=0$

وهو $y_h=(c_1+c_2t)e^t$

٢) ووجدنا الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''-2y'+y=e^t$$

وهو $y_{1_p}=\frac{1}{2}t^2e^t$

نبحث الآن عن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''-2y'+y=t$$

لدينا $r(t)=t$ وحسب نظرية الحل الخاص نختار y_{2_p} من الشكل $y_{2p}=k_1t+k_0$

$$\Rightarrow y''_{2_p}=0\Rightarrow y'_{2_p}=k_1\ y_{2p}=k_1t+k_0$$

نعوض في المعادلة $y''-2y'+y=t$

$$y''-2y'+y=-2k_1+k_1t+k_0=k_1t+k_0-2k_1$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$\begin{cases}k_1=1\\ k_0-2k_1=0\Rightarrow k_0=2k_1=2\end{cases}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''-2y'+y=t$ هو

$$y_{2p}=t+2$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''-2y'+y=e^t+t$ هو

$$y_p=y_{1_p}+y_{2_p}=\frac{1}{2}t^2e^t+t+2$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y=(c_1+c_2t)e^t+\frac{1}{2}t^2e^t+t+2$$

مثال ٢٠: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y''+2y'+5y=16e^t+\sin 2t$$

الحل :

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y''+2y'+5y=0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\Delta=4-4\times 5=-16$$

$$\lambda_1=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i,\ \lambda_2=-1+2i\Rightarrow \alpha=-1,\beta=2$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_h=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''+2y'+5y=16e^t+\sin 2t$$

أ) نبحث عن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''+2y'+5y=16e^t$$

بما أن $r_1(t)=16e^t$ حسب نظرية الحل الخاص نختار y_{1p} من الشكل $y_{1p}=ke^t$

$$y_{1p}=ke^t\Rightarrow y'_{1p}=ke^t\Rightarrow y''_{1p}=ke^t$$

نعوض في المعادلة $y''+2y'+5y=16e^t$ فنحصل على

$$y''+2y'+5y=ke^t+2ke^t+5ke^t=8ke^t=16e^t$$

بمقارنة المعاملات نستنتج أن

$$8k=16\Rightarrow k=2$$

ومنه فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+2y'+5y=16e^t$ هو

$$y_{1p}=2e^t$$

ب) نبحث عن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y''+2y'+5y=\sin 2t$$

بما أن $r_2(t)=\sin 2t$ حسب نظرية الحل الخاص نختار y_{2p} من الشكل

$$y_{2p}=k_1\cos 2t+k_2\sin 2t$$

نحسب المشتقة الأولى والثانية لها

$$y'_{2p}=-2k_1\sin 2t+2k_2\cos 2t,\ y''_{2p}=-4k_1\cos 2t-4k_2\sin 2t$$

نعوض في المعادلة $y''+2y'+5y=\sin 2t$ فنحصل على

$$\begin{aligned}y''+2y'+5y&=-4k_1\cos 2t-4k_2\sin 2t-4k_1\sin 2t+4k_2\cos 2t+5k_1\cos 2t+5k_2\sin 2t\\&=(-4k_1+4k_2+5k_1)\cos 2t+(-4k_2-4k_1+5k_2)\sin 2t=\sin 2t\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نستنتج أن

$$\begin{cases}4k_2+k_1=0\\-4k_1+k_2=1\end{cases}$$

حل مجموعة المعادلات يعطي

$$k_1=-\frac{4}{17},\ k_2=\frac{1}{17}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+2y'+5y=\sin 2t$ هو

$$y_{2p}=-\frac{4}{17}\cos 2t+\frac{1}{17}\sin 2t$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y''+2y'+5y=16e^t+\sin 2t$ هو

$$y_p=y_{1p}+y_{2p}=2e^t-\frac{4}{17}\cos 2t+\frac{1}{17}\sin 2t$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y=y_h+y_p=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)+2e^t-\frac{4}{17}\cos 2t+\frac{1}{17}\sin 2t$$

مثال ٢١ : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y''-y=e^x$$

الحل

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y''-y=0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\Rightarrow \lambda^2=1\Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=1\ \lambda^2-1=0$$

إذن للمعادلة المرفقة جذران حقيقيان $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_1 e^{x}$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' - y + y = e^{x} \quad (1)$$

لدينا $r(x) = e^{x}$ وحسب نظرية الحل الخاص نختار y_p من الشكل $y_p = ke^{x}$

لكن هذا الحل هو أيضا حل خاص للمعادلة التفاضلية المتجانسة بوضع $(c_2 = k, c_1 = 0)$

وبما أن للمعادلة المرفقة جذران مختلفان نضرب الحل المختار في x ليصبح $y_p = kxe^{x}$

نحسب المشتقة الأولى والثانية له

$$y'_p = k\left(e^{x} + xe^{x}\right) = k(1+x)e^{x},\ y''_p = k\left(e^{x} + (1+x)e^{x}\right) = k(2+x)e^{x}$$

نعوض في المعادلة (١)

$$y'' - y = k(2+x)e^{x} - kxe^{x} = [k(2+x) - kx]e^{x} = (2k + kx - kx)e^{x} = e^{x}$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = \frac{1}{2}xe^{x}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}xe^{x}$$

مثال ٢٢: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + 2y' + y = 2x^2$$

الحل

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y'' + 2y' + y = 0$$

نحل المعاجلة المرفقة لها

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

إذن للمعادلة المرفقة جذر مضاعف $\lambda = -1$

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

لدينا $r(x) = 2x^2$ وحسب نظرية الحل الخاص نختار y_p من الشكل $y_p = k_2 x^2 + k_1 x + k_0$

نحسب المشتقة الأولى والثانية له

$$y'_p = 2k_2 x + k_1,\ y''_p = 2k_2$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$y'' + 2y' + y = 2k_2 + 4k_2 x + 2k_1 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0 = k_2 x^2 + (4k_2 + k_1)x + 2k_2 + 2k_1 + k_0 = 2x^2$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$\begin{cases} k_2 = 2 \\ 4k_2 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -4k_2 = -8 \\ 2k_2 + 2k_1 + k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = -2k_2 - 2k_1 = -4 + 16 = 12 \end{cases}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = 2x^2 - 8x + 12$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + 2x^2 - 8x + 12$$

مثال ٢٣: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + y = -x - x^2$$

الحل:

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y'' + y = 0$$

نحل المعادلة المرفقة لها

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 = i^2 \Rightarrow \lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1$$

إذن للمعادلة المرفقة جذران تخيليان

والحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y_h = e^{0t}\left(A\cos t + B\sin t\right) = A\cos t + B\sin t$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

لدينا $r(x) = -x^2 - x.$ وحسب نظرية الحل الخاص نختار y_p من الشكل $y_p = k_2 x^2 + k_1 x + k_0$

نحسب المشتقة الأولى والثانية له

$$y'_p = 2k_2 x + k_1,\ y''_p = 2k_2$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$y'' + y = 2k_2 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0 = k_2 x^2 + k_1 x + 2k_2 + k_0 = -x^2 - x$$

نقارن بين المعاملات فيكون لدينا

$$\begin{cases} k_2 = -1 \\ k_1 = -1 \\ 2k_2 + k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = -2k_2 = 2 \end{cases}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y_p = -x^2 - x + 2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = A\cos x + B\sin x - x^2 - x + 2$$

تمارين

تمرين ١ : حل المعادلات التفاضلية التالية:

$1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=x^2$	$7)y''-9y=10e^{2x}+3\sin x$
$2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+4y=8\sin 2t$	$8)4y''+12y'+9y=9e^{3t}-7e^{2t}$
$3)y''+3y'+16y=24\cos 4t$	$9)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2y=5t\cos t+t$
$4)y''-4y'+4y=(6x^2+4)e^x$	$10)(D^2+4D+3)y=2\cos x+\sin x$
$5)\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+3y=12e^{3x}$	$11)\dfrac{d^2z}{dt^2}+4\dfrac{dz}{dt}+3z=9te^t+25\sin t$
$6)\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+8y=5e^{-x}+8x$	$12)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2y=4\cos 2x+6e^{-x}$

تمرين ٢ : حل المعادلات التفاضلية التالية ذات الشروط الابتدائية المعطاة:

$$13)3\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-4y=22e^{3x} \quad , \quad y(0)=4\ ,\ y'(0)=3$$

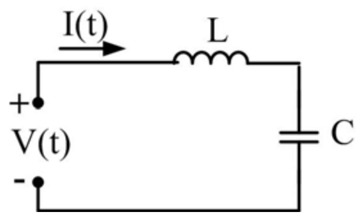
$$14)\,4y''+4y'+y=6t^3+40t \quad ,y(0)=-20, y'(0)=0$$

$$15)\,(D^2+2D+5)y=16\sin x \quad , \quad y(0)=-0.6,\ y'(0)=0.2$$

$$16)\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=2t^2-2t-14 \quad , \quad y(0)=0\ ,\ y'(0)=0$$

الفصل الرابع : تطبيقات كهربائيه عن المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

I) دائرة كهربائيه L-C تحتوى على مكثفة وملف L-C Circuit



١) المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V(t) = V_L + V_C$$

$$V(t) = Li' + \frac{1}{C}\int idt$$

باشتقاق الطرفين نحصل على:

$$V'(t) = Li'' + \frac{1}{C}i$$

$$\Rightarrow i'' + \frac{1}{LC}i = \frac{V'(t)}{L}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها يعطى كما يلي:

- الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$i'' + \frac{1}{LC}i = 0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\, j \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة يعطى بما يلي

$$i_h = c_1 \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t$$

-الحل الخاص i_p للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $i'' + \frac{1}{LC}i = \frac{V'(t)}{L}$ يحسب وفقا لـ $r(t) = \frac{V'(t)}{L}$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة يعطى بما يلي:

$$i(t) = i_h + ip = c_1 \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t + ip$$

وهي عبارة شدة التيار

العبارة النهائية لشدة التيار

نؤول t إلى ما لا نهاية في عبارة شدة التيار $i(t)$ فنحصل على العبارة النهائية لشدة التيار $i(\infty)$

ملاحظة: الحل العام للمعادلة المتجانسة $i_n(t)$ يحتفظ بنفس عبارته

٢) المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$V = V_L + V_C = Li' + \frac{1}{C}\int idt$$

$$V(t) = Lq'' + \frac{1}{C}q$$

ومنه

$$q'' + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}V(t)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها يعطى كما يلي:

- الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{1}{LC} \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{\frac{1}{LC}}\,j, \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,j$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة يعطى بما يلي

$$q_h = c_1 \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t$$

- الحل الخاص q_p للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $q'' + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}V(t)$ يحسب وفقا لـ $r(t) = \frac{V(t)}{L}$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة يعطى بما يلي

$$q(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t + q_p(t)$$

وهي عبارة الشحنة الكهربائية

العبارة النهائية للشحنة الكهربائية

نؤول t إلى ما لا نهاية في عبارة الشحنة الكهربائية $q(t)$ فنحصل على العبارة النهائية للشحنة الكهربائية $q(\infty)$

ملاحظة: الحل العام للمعادلة المتجانسة $q_h(t)$ يحتفظ بنفس عبارته

مثال ١:

لتكن لدينا دائرة كهر بائية L-C ذات فرق الجهد $V = 100\text{ Volts}$ تحتوي على مكثفة $C = 0.05\ \text{Farads}$ و ملف $L = .2\ \text{Henrys}$ أوجد عبارة شدة التيار

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i'' + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} V'(t)$$

لدينا $V = 100$ وبالتالي $V' = 0$

نعوض بقيم $V' = 0$ و $C = .05$ و $L = 0.2$ نحصل على

$$i'' + \frac{1}{0.2 \times 0.05} i = \frac{1}{0.5} \times 0 = 0 \Rightarrow i'' + 100 i = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية وحلها يعطى كما يلي

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + 100 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -100 \Rightarrow \lambda_1 = -10 j, \lambda_2 = 10 j \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 10$$

ومنه فإن عبارة شدة التيار تعطى بالحل العام للمعادلة المتجانسة وهي

$$i(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

مثال ٢:

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهر بائية L-C ذات فرق الجهد $V = 250\text{ Volts}$ تحتوي على مكثفة $C = 0.004\ \text{Farads}$ و ملف $L = 10\ \text{Henrys}$ بافتراض أن شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائة معدومتين $i(0) = 0, q(0) = 0$

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i'' + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} V'(t)$$

لدينا $V = 250$ وبالتالي فإن $V' = 0$

نعوض بقيم $V' = 0$ و $C = 0.004$ و $L = 10$ نحصل على

$$i'' + \frac{1}{0.004 \times 10} i = 0 \Rightarrow i'' + 25 i = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية وحلها يعطى كما يلي

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + 25 = 0 \lambda^2 = 25 j^2 \Rightarrow \lambda_1 = -5 j,\ \lambda_2 = 5 j \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 5$$

ومنه فإن عبارة شدة التيار تعطى بالحل العام للمعادلة المتجانسة وهي

$$i(t)=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t$$

نعوض بقيم $t=0,\ i=0,\ q=0$ لايجاد قيم الثوابت $c_1,\ c_2$

$$i(0)=c_1\times 1+c_2\times 0=c_1=0$$

نرجع للمعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V(t)=V_L+V_C$$

$$V(t)=Li'+\frac{1}{C}q$$

$$\Rightarrow i'+\frac{1}{LC}q=\frac{1}{L}V(t)\Rightarrow i'(0)+\frac{1}{Lc}q(0)=\frac{1}{10}250\Rightarrow i'(0)=25$$

نشتق طرفي المعادلة $i(t)=c_1\cos 5t+c_2\sin 5t$

$$i'(t)=-5c_1\sin 5t+5c_2\cos 5t$$

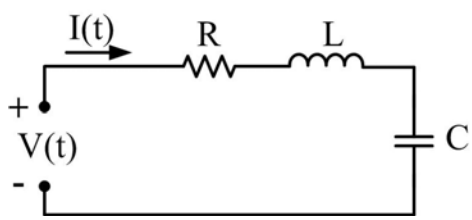
وبالتالي فإن

$$i'(0)=-5c_1\sin 0+5c_2\cos 0=25\Rightarrow 5c_2=25\Rightarrow c_2=\frac{25}{5}=5$$

ومنه فإن عبارة شدة التيار تعطى بما يلي

$$i(t)=5\sin 5t$$

II) دائرة كهربائيه R-L-C تحتوى على مقاومة، مكثفة وملف R-L-C Circuit



1) المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V=V_R+V_L+V_C$$

$$V(t)=Ri+Li'+\frac{1}{C}\int idt$$

نشتق طرفي المعادلة

$$V'(t)=Ri'+Li''+\frac{1}{C}i$$

$$\Rightarrow i''+\frac{R}{L}i'+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{L}V'(t)$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

وعبارة شدة التيار تعطي بالحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة

العبارة النهائية لشدة التيار

نؤول t إلى ما لا نهاية في عبارة شدة التيار $i(t)$ فنحصل على العبارة النهائية لشدة التيار $i(\infty)$

2) المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول الشحنة الكهربائية

$$V = V_R + V_L + V_C$$
$$V = Rq' + Lq'' + \frac{1}{C}q$$
$$\Rightarrow q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}V(t)$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

وعبارة الشحنة الكهربائية تعطي بالحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة

العبارة النهائية للشحنة الكهربائية

نؤول t إلى ما لا نهاية في عبارة الشحنة الكهربائية $q(t)$ فنحصل على العبارة النهائية للشحنة الكهربائية $q(\infty)$

مثال ٣:

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V = 50\sin t$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 20$ Ohms ومكثفة $C = 0.05$ Farads و ملف $L = 10$ Henrys.

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}V'(t)$$

لدينا $\frac{R}{L} = \frac{20}{10} = 2,\ \frac{1}{Lc} = \frac{1}{10 \times 0.05} = 2 \quad , \frac{1}{L}v'(t) = \frac{1}{10}50\cos t = 5\cos t$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$i'' + 2i' + 2i = 5\cos t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحل يعطى كما يلي

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$i'' + 2i' + 2i = 0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$
$$\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 = 4j^2$$
$$\lambda_1 = \frac{-2-2j}{2} = -1 - j, \quad \lambda_2 = -1 + j \ \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 1$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو $i_h = e^{-t}\left(k_1\cos t + k_2\sin t\right)$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

بما أن $r(t)=5\cos t$ إذن نختار الحل الخاص كما يلي: $i_p = A\cos t + B\sin t$

نحسب المشتقة الأولى والثانية لها

$$i'_p = -A\sin t + B\cos t \ ، \ i''_p = -A\cos t - B\sin t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i'' + 2i' + 2i = -A\cos t - B\sin t - 2A\sin t + 2B\cos t + 2A\cos t + 2B\sin t$$
$$\Rightarrow (-A + 2B + 2A)\cos t + (-B - 2A + 2B)\sin t = 5\cos t$$
$$\Rightarrow (A + 2B)\cos t + (B - 2A)\sin t = 5\cos t$$

بمقارنة المعاملات يكون لدينا

$$\begin{cases} A + 2B = 5 \\ B - 2A = 0 \end{cases}$$

ضرب المعادلة الأولى في ٢ وجمعها مع المعادلة الثانية يعطي

$$5B = 10 \Rightarrow B = 2$$

ومن المعادلة الثانية

$$2A = B = 2 \Rightarrow A = 1$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i_p = \cos t + 2\sin t$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$i = i_h + i_p = e^{-t}\left(K_1\cos t + K_2\sin t\right) + \cos t + 2\sin t$$

وهي عبارة شدة التيار

تمارين

تمرين ١

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهربائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=800\cos 5t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=40$ Ohms ومكثفة $C=.02$ Farads و ملف $L=10$ Henrys.

الحل : المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i''+\frac{R}{L}i'+\frac{1}{Lc}i=\frac{V'(t)}{L}$$

لدينا , $\frac{R}{L}=4,\ \frac{1}{Lc}=\frac{1}{10\times 0.02}=5$, $\frac{V'(t)}{L}=-400\sin 5t$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$i''+4i'+5i=-400\sin 5t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحلها يعطى كما يلي

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$i''+4i'+5i=0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2+4\lambda+5=0$$
$$\Delta=16-4\times 5=-4=4j^2$$
$$\lambda_1=\frac{-4-2j}{2}=-2-j,\quad \lambda_2=-2+j\ \Rightarrow \alpha=-2,\ \beta=1$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$i_h=e^{-2t}\left(k_1\cos t+k_2\sin t\right)$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

بما أن $r(t)=-400\sin 5t$ إذن نختار الحل الخاص كما يلي

$$i_P=K_1\cos 5t+K_2\sin 5t.$$

نحسب المشتقة الأولى والثانية لها

$$i'_P=-5K_1\sin 5t+5K_2\cos 5t.$$
$$i''_p=-25K_1\cos 5t-25K_2\sin 5t.$$

نعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i''+4i'+5i=-25K_1\cos 5t-25K_2\sin t-20K_1\sin 5t+20K_2\cos 5t+5K_1\cos 5t+5K_2\sin t$$
$$=\left(-25K_1+20K_2+5K_1\right)\cos 5t+\left(-25K_2-20K_1+5K_2\right)\sin 5t$$

$$= 20(-K_1 + K_2)\cos 5t - 20(K_1 + K_2)\sin 5t = -400\sin 5t$$

بمقارنة المعاملات يكون لدينا

$$\begin{cases} 20(-K_1 + K_2) = 0 \\ -20(K_1 + K_2) = -400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -K_1 + K_2 = 0 \\ K_1 + K_2 = 20 \end{cases}$$

جمع المعادلة الأولى مع المعادلة الثانية يعطي: $K_2 = 10$

ومن المعادلة الأولى: $k_1 = k_2 = 10$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i_p = 10\cos 5t + 10\sin 5t$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$i = i_h + i_p = e^{-2t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t) + 10\cos 5t + 10\sin 5t$$

وهي عبارة شدة التيار

تمرين ٢

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهربائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t) = 850\sin 4t$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 20$ Ohms ومكثفة $C = 0.01$ Farads و ملف $L = 5$ Henrys.

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{Lc}i = \frac{V'(t)}{L}$$

لدينا $\frac{R}{L} = \frac{20}{5} = 4, \frac{1}{Lc} = \frac{1}{5 \times 0.01} = 20, \frac{V'(t)}{L} = \frac{850 \times 4}{5}\cos 4t = 680\cos 4t$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:

$$i'' + 4i + 20i = 680\cos 4t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية والحل يعطى كما يلي

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$i'' + 40i + 20i = 0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + 40\lambda + 20 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 20 = -64 = 64j^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-4 - 8j}{2} = -2 - 4j, \lambda_2 = -2 + 4j \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 4$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$i_h = e^{-2t}(A\cos 4t + B\sin 4t)$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

بما أن $r(t) = 680\cos 4t$ إذن نختار الحل الخاص كما يلي

$$i_p = K_1\cos 4t + K_2\sin 4t$$

نحسب المشتقة الأولى والثانية لها

$$i' = -4K_1\sin 4t + 4K_2\cos 4t$$
$$i'' = -16K_1\cos 4t - 16K_2\sin 4t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i'' + 4i' + 20i = -16K_1\cos 4t - 16K_2\sin t - 16K_1\sin 4t + 16K_2\cos 4t + 20K_1\cos 4t + 20K_2\sin 4t$$
$$= (-16K_1 + 16K_2 + 20K_1)\cos 4t + (-16K_2 - 16K_1 + 20K_2)\sin 4t$$
$$= 4(K_1 + 4K_2)\cos 4t + 4(K_2 - 4K_1)\sin 4t = 680\cos 4t$$

بمقارنة المعاملات يكون لدينا

$$\begin{cases} 4(K_1 + 4K_2) = 680 \\ 4(K_2 - 4K_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 + 4K_2 = 170 \\ K_2 - 4K_1 = 0 \end{cases}$$

بضرب المعادلة الأولى في ٤ وجمعها مع المعادلة الثانية نحصل على

$$17K_2 = 680 \Rightarrow k_2 = 40$$

ومن المعادلة الثانية

$$4K_1 = k_2 = 40 \Rightarrow K_1 = 10$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$i_p = 10\cos 4t + 40\sin 4t$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$i = i_h + i_p = e^{-2t}(A\cos 4t + B\sin 4t) + 10\cos 4t + 40\sin 4t$$

وهي عبارة شدة التيار

تمرين ٣

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t) = 300$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 40$ Ohms ومكثفة $C = 0.02$ Farads وملف $L = 10$ Henrys بافتراض أن شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتان $i(0) = 0, q(0) = 0$

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{Lc} i = \frac{V'(t)}{L}$$

لدينا $\frac{R}{L} = \frac{40}{10} = 4, \frac{1}{LC} = \frac{1}{10 \times 0.02} = 5, V = 300 \Rightarrow V'(t) = 0$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$i'' + i' + 5i = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية وحل يعطى كما يلي:

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(5) = -4 = 4j^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-4-2j}{2} = -2 - j, \ \lambda_2 = -2 + j \Rightarrow \alpha = -2, \ \beta = 1$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$i = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$$

نعوض بقيم $t = 0, i = 0, q = 0$ لايجاد قيم الثوابت $A, \ B$

$$i(0) = 0 \Rightarrow i(0) = A = 0$$

نرجع للمعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V(t) = Ri + Li' + \frac{1}{C}\int i dt = Ri + Li' + \frac{1}{C} q$$

$$Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} q(t) = 300$$

$$Ri(0) + Li'(0) + \frac{1}{C} q(0) = 300 \Rightarrow Li'(0) = 300 \Rightarrow i'(0) = \frac{300}{L} = \frac{300}{10} = 30$$

نشتق طرفي المعادلة $i = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$

$$i'(t) = -2e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + e^{-2t}(-A\sin t + B\cos t)$$
$$= e^{-2t}[(-2A + B)\cos t + (2B + A)\sin t]$$

إذن

$$i'(0) = -2A + B = 30 \Rightarrow B = 30$$

وبالتالي فإنعبارة شدة التيار تعطى بما يلي :

$$i(t) = 30e^{-2t}\sin t$$

تمرين ٤

أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهربائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=24\cos 5t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=6$ Ohms ومكثفة $C=0.04$ Farads و ملف $L=1$ Henrys بافتراض أن شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتان $i(0)=0,\ q(0)=0$

الحل: المعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$i''+\frac{R}{L}i'+\frac{1}{LC}i=\frac{V'}{L}$$

لدينا $\frac{R}{L}=6\ ,\ \frac{1}{LC}=\frac{1}{0.04}=25\ \frac{V'(t)}{L}=-120\sin 5t,$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على:

$$i''+6i'+25i=-120\sin 5t$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وحل يعطى كما يلي

١) الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$i''+6i'+25i=0$$

نحل المعادلة المرفقة

$$\lambda^2+6\lambda+25=0$$
$$\Delta=36-4\times 25=-64=64j^2$$
$$\lambda_1=\frac{-6-8j}{2}=-3-4j,\quad \lambda_2=-3+4j\Rightarrow \alpha=-3,\beta=4$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$i_h=e^{-3t}\left(A\cos 4t+B\sin 4t\right)$$

٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

بما أن $r(t)=-120\sin 5t$ إذن نختار الحل الخاص كما يلي: $i_p=K_1\cos 5t+K_2\sin 5t$

نحسب المشتقة الأولى والثانية لها

$$i'=-5K_1\sin 5t+5K_2\cos 5t.\ ،\ i''=-25K_1\cos 5t-25K_2\sin 5t.$$

نعوض في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$\begin{aligned}i''+6i'+25i&=-25K_1\cos 5t-25K_2\sin 5t-30K_1\sin 5t+30K_2\cos 5t+25K_1\cos 5t+25k_2\sin 5t\\&=\left(-25K_1+30K_2+25K_1\right)\cos 5t+\left(-25K_2-30K_1+25K_2\right)\sin 5t\\&=30k_2\cos 5t-30k_1\sin 5t=-120\sin 5t\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات يكون لدينا

$$\begin{cases} K_2 = 0 \\ -30K_1 = -120 \Rightarrow K_1 = 4 \end{cases}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو $i_p = 4\cos 5t$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$i = i_h + i_p = e^{-3t}(A\cos 4t + B\sin 4t) + 4\cos 5t$$

نعوض بقيم $t = 0, i = 0, q = 0$ لايجاد قيم الثوابت A, B

$$i(0) = 0 \Rightarrow i(0) = A + 4 = 0 \Rightarrow A = -4$$

نرجع للمعادلة المعبرة عن الدائرة ذات المجهول شدة التيار

$$V(t) = Ri + Li' + \frac{1}{C}\int idt = Ri + Li' + \frac{1}{C}q$$

$$\frac{R}{L}i(t) + i'(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V(t)}{L}$$

$$\frac{R}{L}i(0) + i'(0) + \frac{1}{LC}q(0) = \frac{V(0)}{L} \Rightarrow i'(0) = 24$$

نشتق طرفي المعادلة $i = e^{-3t}(A\cos 4t + B\sin 4t) + 4\cos 5t$

$$i'(t) = -3e^{-3t}(A\cos 4t + B\sin 4t) + 4e^{-3t}(-A\sin 4t + B\cos 4t) - 20\sin 5t$$

إذن $i'(0) = -3A + 4B = 24 \Rightarrow 4B = 24 - 12 \Rightarrow B = 3$

وبالتالي فإنعبارة شدة التيار تعطى بما يلي

$$i(t) = e^{-3t}(-4\cos 4t + 3\sin 4t) + 4\cos 5t$$

تمارين إضافية

١) أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t) = 110\sin \omega t$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 40\Omega$ Ohms ومكثفة $C = 0.1$ Farads و ملف $L = .4$ Henrys.

٢) أوجد عبارة شدة التيار في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t) = 210\sin 4t$ Volts تحتوي على مكثفة $C = 0.005$ Farads و ملف $L = 2$ Henrys بافتراض أن شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتان $i(0) = 0, q(0) = 0$

٣) في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t) = 0$ Volts تحتوي على مقاومة $R = 6$ Ohms و مكثفة $C = 0.003$ Farads و ملف $L = 0.5$ Henrys إذا كانت شدة التيار الابتدائية $i(0) = 0$ والشحنة الكهربائية الابتدائية $q(0) = 0.05C$.

أوجد عبارة الشحنة الكهربائية و التيار الكهربائي بدلالة الزمن.

٤) لتكن لدينا دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=100$ Volts تحتوي على مقاومة $R=3$ Ohms و مكثفة $C=0.05$ Farads و ملف $L=2$ Henrys . إذا كانت شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتين $i(0)=0,\ q(0)=0$
أوجد عبارة الشحنة الكهربائية و التيار الكهربائي بدلالة الزمن

٥) في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=20\sin 2t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=4$ Ohms و مكثفة $C=0.05$ Farads و ملف $L=0.5$ Henrys إذا كانت شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتين $i(0)=0,\ q(0)=0$.
أوجد عبارة الشحنة الكهربائية و التيار الكهربائي بدلالة الزمن.

٦) أوجد حالة الاستقرار للشحنة الكهربائية في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=10\cos t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=10$ Ohms و مكثفة $C=0.004$ Farads و ملف $L=2$ Henrys.

٧) أوجد حالة الاستقرار للتيار الكهربائي في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=56\sin 2t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=50$ Ohms و مكثفة $C=0.06$ Farads و ملف $L=10$ Henrys

٨) في دائرة كهر بائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=80\sin 3t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=4$ Ohms و مكثفة $C=0.08$ Farads و ملف $L=5$ Henrys. أوجد حالة الاستقرار للشحنة الكهربائية

٩) في دائرة كهربائية R-L-C ذات فرق الجهد $V(t)=120\cos 4t$ Volts تحتوي على مقاومة $R=8$ Ohms و مكثفة $C=0.5$ Farads و ملف $L=1$ Henrys أوجد حالة الاستقرار للتيار الكهربائي .

١٠) في دائرة كهربائية L-C ذات فرق الجهد $V(t)=250$ Volts تحتوي على مكثفة $C=0.004$ Farads و ملف $L=10$ Henrys أوجد عبارة شدة التيار بدلالة الزمن إذا كانت شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتين $i(0)=0,\ q(0)=0$.

١١) أوجد عبارة شدة التيار بدلالة الزمن في دائرة كهر بائية L-C ذات فرق الجهد $V(t)=90\cos t$ Volts تحتوي على مكثفة $C=0.25$ Farads و ملف $L=1$ Henrys إذا كانت شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتين $i(0)=0,\ q(0)=0$.

١٢) لتكن لدينا دائرة كهر بائية L-C ذات فرق الجهد $V(t)=10t$ Volts تحتوي على مكثفة

Farads $C = 0.1$ و ملف Henrys $L = 0.1$ إذا كانت شدة التيار الابتدائية والشحنة الكهربائية الابتدائية معدومتين $i(0) = 0, q(0) = 0$. أوجد عبارة الشحنة الكهربائية بدلالة الزمن.

المراجع

References

1) **Technical Calculus with Analytic**
J.Gersting, Dover Publication, Inc. 1992

2) **Mathematics for Electrical and Telecom. Technicians**
V.1, Smithson, Mc graw Hill 1986.

3) **Advanced Engineering Mathematics**
E.Kreysrig,Johns Wiley & Sons, 7th edition 1993.

4) **Engineering Mathematics**
K. Strou, Macmillan Press, fourth edition 1995.

5) **Mathematics for Technicians**
A. Greer & G. Taylor, Stanley Thornes 1989.

6) **Calculus**
P. Avbbott & M. Wardle, Teach yourself-books NTC Publishing Group. USA 1992

7) **Engineering Mathematics**
A.Croft, R.Davison, M.Hargreaves, 2nd Edition Addison-Wesley, 1996

8) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ -١٩٨٣م.

9) إبراهيم شورار، مذكرة مقرر ٢٢٢ ريض، الكلية التقنية بالرياض، ١٤٢٤هـ - ٢٠٠٣م.

10) حسين الشهيل، مذكرة مقرر ٣٠١ ريض، الكلية التقنية بالرياض.

١١) خالد عابد، مذكرة مقرر ٢٠٥ ريض، الكلية التقنية بالرياض.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS