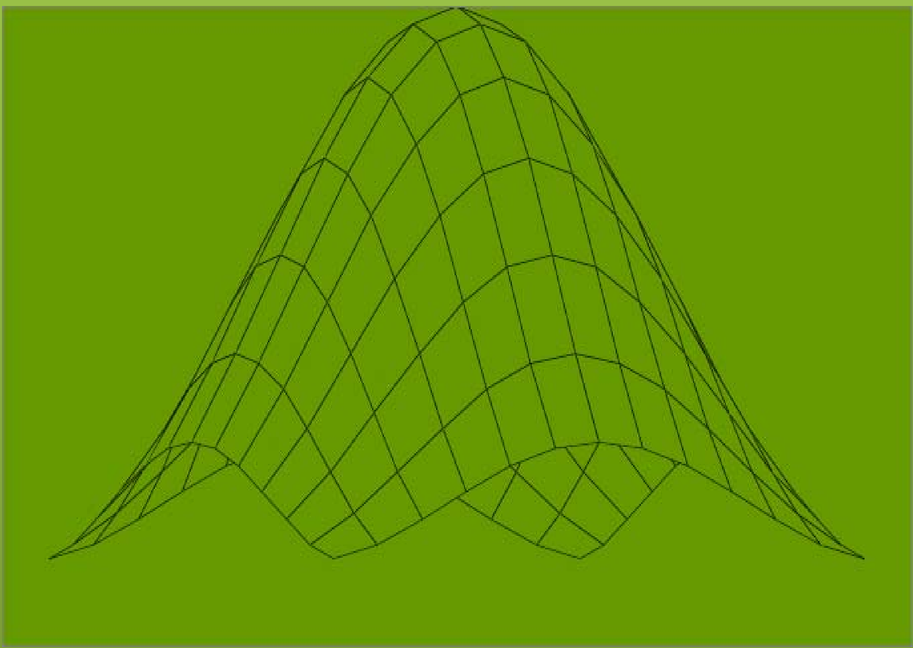
جامعة الملك سعود

تصميم وتحليل التجارب



###

2012 /1433

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على سيدنا محمد ، أشرف المرسلين ، وعلى آله وصحبه ، وعلى أزواجه وذريّته ، ومن تابعهم إلى يوم الدين .

أما بعد ،

سألني كثير من الطلاب أن أعمل ملخصاً باللغة العربية في مادة "تصميم وتحليل التجارب" ، من الكتاب المقرر " Design and Analysis of Experiments " من تأليف " Douglas C. Montgomery " الموجود بالطبعة الثالثة من النسخة الخامسة ، وهو الكتاب المقرر منه لمادة 337 إحص على النظام القديم ولفصل واحد ، و437 إحص على النظام الحديث ولفصل واحد أيضاً ، بحيث يسهّل عليهم ما صعُب ، ويرجعون إليه وقت الحاجة. فلم أجد مندوحةً عن الإجابة لطلبهم ، فعملت هذا المختصر. وإني لأهدي ثوابه إلى أساتذتي ومعلميّ المسلمين ، عسى الله أن يرفع درجاتهم ، وغيرِ المسلمين ، عسى الله أن يهديَهم .

جميع العمليات ستتم باستخدام برنامج المينيتاب "Minitab" ، وفي حالة الحاجة إلى غيره سيُنص على ذلك.

وفي الختام، فإني أعتذر عما يرِد في هذا الملخص من أخطاء. وأرجو ألاّ يُلتفتَ إليها. ويُنظر إلى ما فيه الفائدة . فقد قال تعالى : فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاءً وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ . وَاللَّهُ أَعْلَمُ. وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ.

وقال الشاعر :

وما نَيلُ المطالبِ بالتّمنّي ... ولكنْ تُؤخذُ الدّنيا غِلابا

وما استعصى على قومٍ منالٌ ... إذا الإقدامُ كانَ لهمْ رِكابا

حبيب علي إسماعيل
الرياض
2012/1433

تصميم وتحليل التجارب

مقدمة

تحليل التجارب :

يستخدم تحليل التجارب كما يدل اسمه لمعرفة وجود أو عدم وجود فروق في نواتج تجربة أو تجارب معينة .

تصميم التجارب :

هو العملية التي تنظم بها التجربة لتهميش التأثيرات غير المهمة والتركيز على التأثيرات المهمة .

فمثلا إذا أريد تحديد اختلاف دواء جديد عن دواء مستخدم . فيتطلب التصميم الحصول على مجموعتين من الأفراد متشابهين . إن تشابه المجموعتين يؤدي إلى تهميش التأثيرات غير المهمة بحيث إذا استخدم الدواء الجديد على إحدى المجموعتين والدواء القديم على المجموعة الأخرى لن يكون هناك اختلاف في النتيجة على المجموعتين إلا إذا كان تأثير الدواء مختلفا . أما إذا لم يوجد اختلاف في تأثير هذين النوعين من الدواء فلن يظهر أي الاختلاف بين المجموعتين .
أما التحليل فيمكن استخدام اختبارات معينة لمعرفة الفرق بين المجموعتين .

الفصل الأول

__مقارنة متوسط مجتمع بقيمة محددة :__

يمكن اختبار فيما إذا كان متوسط مجتمع معين μ يختلف عن قيمة محددة μ_0 وتوضع على النحو التالي:

$$\text{(i)} \quad H_0 : \mu = \mu_0 \quad , \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{(ii)} \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad , \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\text{(iii)} \quad H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad , \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

فإذا كان المجتمع يتصف بما يلي :

1- تباينه σ^2 معلوم وحجم العينة المستخدم كبيرا

2- تباينه σ^2 معلوم وحجم العينة صغيرا (في العادة أقل من ثلاثين مفردة يعتبرصغيرا) ولكن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي .

فيتم حساب القيمة Z_0 كما يلي :

$$Z_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثم مقارنتها بالقيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي القياسي عند مستوى معنوي للآختبار α .

ويكون رفض فرض العدم بحسب نوع الإختبار كما يلي :

(i) إذا كانت $Z_0 > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_0 < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

(ii) $Z_0 > Z_\alpha$.

(iii) $Z_0 < Z_{1-\alpha}$.

حيث Z_α تعني قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي القياسي التي تكون المساحة عن يمينه تساوي α .

إيجاد القيمة P :

يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار كما يلي :

(i) إذا كانت Z_0:

(أ) موجبة فتحسب المساحة على يمينها وتضرب في 2 .

(ب) سالبة فتحسب المساحة على يسارها وتضرب في 2 .

(ii) تحسب المساحة على يمين Z_0.

(iii) تحسب المساحة على يسار Z_0.

ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للمتوسط μ:

يمكن الحصول على حدود ثقة للمتوسط من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة $$\mu = \bar{y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(ii) الحد الأدنى $$\mu = \bar{y} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(iii) الحد الأعلى $$\mu = \bar{y} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال :

يدعي أحد الموردين للقماش بأن قماشه يتصف بأن قوة تحمله للشد تزيد في المتوسط عن 47 كيلوجراما في السنتيمتر المربع وتتبع التوزيع الطبيعي . يريد أحد محلات الخياطة التعامل مع هذا المورد فقام بدراسة واختبار أن قوة تحمل هذا القماش للشد تتجاوز 47 كيلوجراما في السنتيمتر المربع .

فإذا كانت الدراسات والتجارب السابقة تشير إلى أنه يمكن اعتبار تباين هذا النوع من القماش يساوي 56 كيلوجراما مربعا في السنتيمتر المربع. أخذت عينة عشوائية من هذا القماش مكونة من خمس قطع وقيست قوة تحمل كل واحدة منها قبل أن تتمزق فوجد متوسط قوة تحملها $\bar{y}$ يساوي 52 . هل يمكن عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ تأكيد ادعاء هذا المورد.

الحل :

تكون فروض الإختبار على النحو التالي :

$$H_0 : \mu \le \mu_0 = 47 \quad , \quad H_1 : \mu > \mu_0 = 47$$

ويكون حساب القيمة Z_0 كما يلي:

$$Z_0 = \frac{52-47}{\frac{7.48}{\sqrt{5}}} = 1.4947$$

ومقارنتها بقيمة Z_{α} أي $Z_{0.05} = 1.645$
وبالتالي ومن هذه البيانات لا يمكن رفض فرض العدم ، أي أن الإدعاء غير صحيح.

إيجاد القيمة P :
نوجد المساحة على يمين القيمة 1.4947 من التوزيع الطبيعي القياسي كما يلي :
$$P = 0.0674964$$
وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم.

إيجاد الحد الأدنى للثقة للمتوسط μ :
$$\mu = 52 - 1.645\sqrt{\frac{56}{5}} = 46.4948$$
وحيث أن هذه الفترة تشمل القيمة 47 فإن قوة الشد لهذا القماش لا تتجاوزها وبالتالي فإن إدعاء هذا المورد غير صحيح . اهـ

أما إذا كان المجتمع يتصف بما يلي :
3- تباين المجتمع σ^2 غير معلوم والمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي :
يتم تقدير تباين المجتمع من العينة ويرمز له بالرمز s^2 ، ثم يتم حساب القيمة t_0 كما يلي :
$$t_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$
ثم مقارنتها بالقيمة t من جدول توزيع t ، بدرجة حرية $n-1$.
ويكون رفض فرض العدم بحسب نوع الإختبار كما يلي :
(i) إذا كانت $t_0 > t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ أو $t_0 \le t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$.
(ii) $t_0 > t_{n-1,\alpha}$.
(iii) $t_0 \le t_{n-1,1-\alpha}$.
حيث $t_{n-1,\alpha}$ تعني قيمة t من جدول توزيع t التي تكون المساحة عن يمينه تساوي α .

إيجاد القيمة P :

يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار وبحسب درجة الحرية $n-1$ كما يلي :
(i) إذا كانت t_0:
(أ) موجبة فتحسب المساحة على يمينها وتضرب في 2 .
(ب) سالبة فتحسب المساحة على يسارها وتضرب في 2 .
(ii) تحسب المساحة على يمين t_0.
(iii) تحسب المساحة على يسار t_0.
ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للمتوسط μ :

يمكن الحصول على حدود ثقة للمتوسط من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة
$$\mu = \bar{y} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(ii) الحد الأدنى
$$\mu = \bar{y} - t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

(iii) الحد الأعلى
$$\mu = \bar{y} + t_{n-1,\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

مثال :

يدعي أحد الموردين للقماش بأن قماشه يتصف بأن قوة تحمله للشد تزيد في المتوسط عن 47 كيلوجراما في السنتيمتر المربع وتتبع التوزيع الطبيعي . يريد أحد محلات الخياطة التعامل مع هذا المورد فقام بدراسة واختبار أن قوة تحمل هذا القماش للشد تتجاوز 47 كيلوجراما في السنتيمتر المربع . أخذت عينة عشوائية من هذا القماش وقيست قوة تحمل كل واحدة منها قبل أن تتمزق فوجد كما يلي : 55، 53، 44، 56 . هل يمكن عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ تأكيد ادعاء هذا المورد.

الحل :

تكون فروض الإختبار على النحو التالي :

$$H_0 : \mu \le \mu_0 = 47 \quad , \quad H_1 : \mu > \mu_0 = 47$$

ويكون حساب القيمة t_0 كما يلي:

$$t_0 = \frac{52-47}{\frac{5.47723}{\sqrt{4}}} = 1.82574$$

ومقارنتها بقيمة $t_{n-1,\alpha}$ أي $t_{3,0.05} = 2.35336$

وبالتالي ومن هذه البيانات لا يمكن رفض فرض العدم ، أي أن الإدعاء غير صحيح.

إيجاد القيمة P :

نوجد المساحة على يمين القيمة 1.82574 من توزيع t بدرجة حرية 3 كما يلي :

$$P = 0.0826854$$

وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم.

إيجاد الحد الأدنى للثقة للمتوسط μ :

$$\mu = 52 - 2.35336\frac{5.47723}{2} = 45.555$$

وحيث أن هذه الفترة تشمل القيمة 47 فإن قوة الشد لهذا القماش لا تتجاوزها وبالتالي فإن إدعاء هذا المورد غير صحيح . اهـ

4- تباين المجتمع σ^2 غير معلوم وحجم العينة كبيراً :

يتم تقدير تباين المجتمع من العينة ويرمز له بالرمز s^2، ثم يتم حساب القيمة Z_0 كما في السابق ولكن باستبدال s^2 ب σ^2.

<u>إختبار الفرق بين متوسطين للبيانات الزوجية</u>

في كثير من الأحيان يتعذر الحصول على عينتين عشوائيتين متماثلتين مستقلتين بحيث يمكن استخدامهما في دراسة الفرق بين المتوسطين في هذه الحالة تستخدم عينة واحدة مرتين .

مثال :

في دراسة لأثر حمية غذائية في إنقاص الوزن أخذت عينة عشوائية من مجموعة متنوعة من المتطوعين. قيس وزن كل واحد منهم قبل استخدام الحمية، ثم بعد استخدامها لفترة معينة.
والسؤال المطلوب الإجابة عليه هنا هل هذه الحمية ذات تأثير معنوي في إنقاص الوزن ؟ وذلك عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ إذا علمنا أن أوزان هذه العينة بالكيلوجرام كانت كما يلي :

	رقم مفردات العينة															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
قبل	66	58	61	68	50	69	54	72	63	55	74	67	75	80	63	82
بعد	70	55	60	66	53	65	52	68	59	57	67	63	71	77	67	76

الحل :
نحصل على الفروق في الأوزان d بطرح الأوزان بعد الحمية من الأوزان قبلها.

	رقم مفردات العينة															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
d	-4	3	1	2	-3	4	2	4	4	-2	7	4	4	3	-4	6

تكون فروض الاختبار هنا على النحو التالي :

$$H_0 : \bar{d} \le 0 \quad , \quad H_1 : \bar{d} > 0$$

نحسب بعد ذلك متوسط الفروق $\bar{d}$، وانحرافها المعياري s_d، وخطأها المعياري $s_{\bar{d}} = \dfrac{s_d}{\sqrt{n}}$.

فيكون المتوسط 1.9375 ، والانحراف المعياري 3.43451 ، والخطأ المعياري 0.858627 ، فنحصل على t_0 كما يلي :

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}} = 2.25651$$

ثم مقارنتها مع $t_{15,0.05} = 1.75305$ ، فنجد t_0 أكبر وبالتالي يتم رفض فرض العدم ، أي أن هذه الحمية تؤدي إلى نقص الوزن بدرجة ثقة 95%.

إيجاد القيمة P :
تكون القيمة P هي المساحة على يمين القيمة 2.25651 من توزيع t بدرجة حرية 15 ، والتي تساوي 0.0196960 وهي أصغر من $\alpha = 0.05$ ، وبالتالي يتم رفض فرض العدم ، أي أن هذه الحمية تؤدي إلى نقص الوزن بدرجة ثقة 95%.

إيجاد الحد الأدنى للثقة للمتوسط $\overline{D}$:

$$\overline{D} = \bar{d} - t_{15,0.05} s_{\bar{d}} = 1.9375 - 1.75305 * 0.858627 = 0.432284$$

وحيث أن هذه الفترة لا تشمل الصفر، أي أن هذه الحمية تؤدي إلى نقص الوزن بدرجة ثقة 95%. اهـ

<u>مقارنة تباين مجتمع طبيعي بقيمة معينة</u>

يمكن مقارنة تباين مجتمع طبيعي σ^2 بقيمة معينة σ_0^2 على النحو التالي :

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 & , \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ \text{(ii)} & H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 & , \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \text{(iii)} & H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 & , \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}$$

ويكون ذلك بحساب القيمة χ_0^2 على النحو التالي :

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

ويكون رفض فرض العدم بحسب الفروض على النحو التالي :
(i) إذا كانت $\chi_0^2 > \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ أو $\chi_0^2 < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
(ii) إذا كانت $\chi_0^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$
(iii) إذا كانت $\chi_0^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

إيجاد القيمة P :

ويكون حساب القيمة P بحسب الفروض وبحسب درجة الحرية $n-1$ على النحو التالي :
(i) إذا كانت :
أ) $\chi_0^2 > s^2$ فتؤخذ المساحة على يمين χ_0^2 ، ثم تضرب في 2 .
ب) $\chi_0^2 \leq s^2$ فتؤخذ المساحة على يسار χ_0^2 ، ثم تضرب في 2 .

(ii) تؤخذ المساحة على يمين χ_0^2 .

(iii) تؤخذ المساحة على يسار χ_0^2 .

ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للتباين σ^2:

يمكن الحصول على حدود ثقة للتباين من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة $$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}$$

(ii) الحد الأدنى $$\sigma^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}$$

(iii) الحد الأعلى $$\sigma^2 = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}$$

مثال :

قامت إحدى السكرتيرات بدراسة لتباين أخطاء الطباعة التي تقوم بها بافتراض أنها تتوزع تقريباً توزيعاً طبيعياً . أخذت عينة عشوائية من صفحات قامت بكتابتها فوجدت فيها الأخطاء التالية :
5، 11، 9، 10، 8، 7 .

(أ) إختبر :
(i) عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ أن تباين الأخطاء يتجاوز 2 .
(ii) عند مستوى معنوي $\alpha = 0.1$ أن تباين الأخطاء يختلف عن 3.

(ب) أوجد القيمة P للإختبار في (أ).

(ج) أوجد :
(i) 95% حد أدنى لتباين الأخطاء .
(ii) 90% حدود ثقة لتباين الأخطاء .

الحل :

(أ) :

(i) $\chi_0^2 = 11.6667$, $\chi^2_{5,0.5} = 11.0705$ ، وبالتالي نرفض فرض العدم ، أي أن تباين الأخطاء يتجاوز 2 .

(ii) $\chi_0^2 = 7.77778$, $\chi^2_{5,0.95} = 1.14548$ ، $\chi^2_{5,0.05} = 11.0705$ وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم ، أي أن تباين الأخطاء لا يختلف عن 3 .

(ب) القيمة P:

(i) $P = 0.0396515$ ، وبالتالي نرفض فرض العدم ، أي أن تباين الأخطاء يتجاوز 2 .

(ii) $P = 0.337831$ ، وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم ، أي أن تباين الأخطاء لا يختلف عن 3 .

(ج)

(i) $2.10770 < \sigma^2$

(ii) $2.10770 < \sigma^2 < 20.3700$. اهـ

الفصل الثاني

<u>إختبارات لمعرفة الفرق بين مجتمعين</u>

إذا كانت μ_1 ترمز لمتوسط المجتمع الأول ، μ_2 لمتوسط المجتمع الثاني ، σ_1^2 لتباين المجتمع الأول ، σ_2^2 لتباين المجتمع الثاني . فإذا كانت بيانات المجتمعين تتبعان التوزيع الطبيعي ، أو كان حجمها كبيراً ، فإنه يمكن معرفة إختلاف أو تطابق المجتمعين . ويكون ذلك على النحو التالي :
يحسب متوسط وتباين بيانات المجتمعين ويرمز لها بالترتيب $\bar{y}_1, \bar{y}_2, s_1^2, s_2^2$.

(I) عندما تكون σ_1^2 و σ_2^2 معروفة :
يكون اختبار متوسطي المجتمعين بحسب أحد الفروض التالية كما يلي :

(i) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

(ii) $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$

(iii) $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$

وذلك عن طريق حساب القيمة Z_0 على النحو التالي :

$$Z_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

حيث n_1 حجم العينة المسحوبة من المجتمع الأول و n_2 حجم العينة المسحوبة من المجتمع الثاني . ثم مقارنتها بقيمة Z من التوزيع الطبيعي القياسي .
ويكون رفض فرض العدم كما يلي :

(i) إذا كانت $Z_0 > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_0 < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

(ii) $Z_0 > Z_\alpha$.

(iii) $Z_0 < Z_{1-\alpha}$.

حيث Z_α تعني قيمة Z من جدول التوزيع الطبيعي القياسي التي تكون المساحة عن يمينه تساوي α .

إيجاد القيمة P :
يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار كما يلي :

(i) إذا كانت Z_0:

(أ) موجبة فتحسب المساحة على يمينها وتضرب في 2 .

(ب) سالبة فتحسب المساحة على يسارها وتضرب في 2 .

(ii) تحسب المساحة على يمين Z_0.

(iii) تحسب المساحة على يسار Z_0.

ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للفرق بين المتوسطين :

يمكن الحصول على حدود ثقة للفرق بين المتوسطين من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

(ii) الحد الأدنى
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

(iii) الحد الأعلى
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

(II) عندما تكون σ_1^2 و σ_2^2 غير معروفة ولكن يعرف تساويهما :

يحسب تقدير لتباين هذين المجتمعين ، ويرمز له بالرمز S_p^2 وذلك على النحو التالي :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

حيث s_1^2 تقدير تباين المجتمع الأول محسوباً من العينة المسحوبة من المجتمع الأول . و s_2^2 تقدير تباين المجتمع الثاني محسوباً من العينة المسحوبة من المجتمع الثانـي .

وتكون اختبارات الفروض على النحو التالي :

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & H_0 : \mu_1 = \mu_2 & , \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \\ \text{(ii)} & H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 & , \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ \text{(iii)} & H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 & , \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array}$$

وذلك عن طريق حساب القيمة t_0 على النحو التالي :

$$t_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث n_1 حجم العينة المسحوبة من المجتمع الأول و n_2 حجم العينة المسحوبة من المجتمع الثاني و S_p تقدير الإنحراف المعياري المشترك للمجتمعين ، ويحسب بأخذ الجذر التربيعي للتباين S_p^2.

ثم مقارنة t_0 بقيمة t من توزيع t عند درجة حرية (n_1+n_2-2) ومستوى معنوي للإختبار α .
ويكون رفض فرض العدم كما يلي :

(i) إذا كانت $t_0 > t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}$ أو $t_0 < t_{1-\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}$.

(ii) $t_0 > t_{\alpha,(n_1+n_2-2)}$.

(iii) $t_0 < t_{1-\alpha,(n_1+n_2-2)}$.

حيث $t_{\alpha,(n_1+n_2-2)}$ تعني قيمة t من جدول توزيع t ودرجة حرية (n_1+n_2-2) والتي تكون المساحة عن يمينه تساوي α .

إيجاد القيمة P :

يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار كما يلي :

(i) إذا كانت t_0:
(أ) موجبة فتحسب المساحة على يمينها وتضرب في 2 .
(ب) سالبة فتحسب المساحة على يسارها وتضرب في 2 .

(ii) تحسب المساحة على يمين t_0.

(iii) تحسب المساحة على يسار t_0.

ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للفرق بين المتوسطين :

يمكن الحصول على حدود ثقة للفرق بين المتوسطين من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

(ii) الحد الأدنى
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - t_{\alpha,(n_1+n_2-2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

(iii) الحد الأعلى
$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{\alpha,(n_1+n_2-2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

(III) عند عدم معرفة أي شيئ عن σ_1^2 و σ_2^2 :

يحسب تقدير لتباين هذين المجتمعين ، ويرمز له بالرمز S^2 وذلك على النحو التالي :

$$S^2 = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

حيث s_1^2 تقدير تباين المجتمع الأول محسوباً من العينة المسحوبة من المجتمع الأول . و s_2^2 تقدير تباين المجتمع الثاني محسوباً من العينة المسحوبة من المجتمع الثاني .
وتكون اختبارات الفروض على النحو التالي :

$$\text{(i)} \quad H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
$$\text{(ii)} \quad H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2$$
$$\text{(iii)} \quad H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \quad , \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

وذلك عن طريق حساب القيمة t' على النحو التالي :

$$t' = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S}$$

حيث S الجذر التربيعي لتقدير تباين المجتمعين .
ثم مقارنة t' بقيمة t من توزيع t عند مستوى معنوي للإختبار α و درجة حرية υ والتي تساوي :

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

وإذا كانت قيمة υ كسراً فيخذ الرقم الصحيح فقط .

ويكون رفض فرض العدم كما يلي :
(i) إذا كانت $t' > t_{\frac{\alpha}{2},\upsilon}$ أو $t' < t_{1-\frac{\alpha}{2},\upsilon}$.
(ii) $t' > t_{\alpha,\upsilon}$.
(iii) $t' < t_{1-\alpha,\upsilon}$.
حيث $t_{\alpha,\upsilon}$ تعني قيمة t من جدول توزيع t بدرجة حرية υ التي تكون المساحة عن يمينه تساوي α .

إيجاد القيمة P :

يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار كما يلي :

(i) إذا كانت t_0:
(أ) موجبة فتحسب المساحة على يمينها وتضرب في 2 .
(ب) سالبة فتحسب المساحة على يسارها وتضرب في 2 .
(ii) تحسب المساحة على يمين t_0.
(iii) تحسب المساحة على يسار t_0.
ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للفرق بين المتوسطين :

يمكن الحصول على حدود ثقة للفرق بين المتوسطين من العلاقة التالية :

(i) حدا الثقة $$\mu_1-\mu_2=\bar{y}_1-\bar{y}_2\pm t_{\frac{\alpha}{2},\upsilon}S$$

(ii) الحد الأدنى $$\mu_1-\mu_2=\bar{y}_1-\bar{y}_2-t_{\alpha,\upsilon}S$$

(iii) الحد الأعلى $$\mu_1-\mu_2=\bar{y}_1-\bar{y}_2+t_{\alpha,\upsilon}S$$

مثال :

أجريت دراسة لتطوير صناعة الإسمنت نتج عنها طريقة مبتكرة للإنتاج . أخذت عينتان مستقلتان من الإنتاج المطور ومن الإنتاج القديم بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي ، فكانت صلابتهما كما يلي :

الإنتاج	
المطور	65, 81, 57, 66, 82, 67, 82, 59, 75, 70
القديم	64, 71, 63, 59, 65, 56, 69, 74, 55, 61

(i) إذا فرض أن تباين الإنتاج المطور 90 والقديم 75 ، فاختبر عند مستوى معنوي $\alpha=0.05$ أن الإنتاج المطور أفضل من القديم .

(ii) إذا لم يعرف تباين الإنتاج المطور ولا القديم ، وفرض تساويهما . فأوجد القيمة P لإختبار أن الإنتاج المطور أفضل من القديم ، عند مستوى معنوي $\alpha=0.05$.

(iii) إذا لم يعرف تباين الإنتاج المطور ولا القديم . فأوجد 95% حدود ثقة للفرق بين متوسطي الإنتاجين ، المطور والقديم .

الحل :

(i) $$Z_0=\frac{70.4-63.7}{\sqrt{9+7.5}}=1.64943 \quad , \quad Z_{0.05}=1.645$$

نرفض فرض العدم ، ونقول بأن الإنتاج المطور أفضل عند $\alpha=0.05$.

(ii) $t_0=1.89378$ ، $P=0.0372205$ وهي أصغر من α ، وبالتالي نرفض فرض العدم ونقول بأن الإنتاج المطور أفضل من القديم ، عند مستوى معنوي $\alpha=0.05$.

(iii) $S=3.53789$ ، $\upsilon=15$ ، $t_{\frac{\alpha}{2},\upsilon}=2.13145$ ، وبالتالي :

$$-0.840834<\mu_1-\mu_2<14.2408$$

<u>إختبار الإختلاف أو التباين بين مجتمعين طبيعيين</u>

يكون اختبار وجود اختلاف في تباين مجتمعين طبيعيين على النحو التالي :

(i) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \quad , \quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

(ii) $H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2 \quad , \quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

(iii) $H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2 \quad , \quad H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$

حيث σ_1^2 و σ_2^2 هما تباينا المجتمعين الأول والثاني بالترتيب .
ويكون ذلك عن طريق حساب القيمة F_0 على النحو التالي :

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

حيث s_i^2 هو تباين العينة المسحوبة من المجتمع i .

ويكون رفض فرض العدم على النحو التالي :
(i)
(أ) إذا كانت $F_0 > F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$
(ب) أو $F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$
(ii) إذا كانت $F_0 > F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$
(iii) إذا كانت $F_0 < F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$
حيث n_1 و n_2 هما أحجام عينتي المجتمعين الأول والثاني بالترتيب .

إيجاد القيمة P :

يمكن إيجاد القيمة P بحسب نوع الإختبار كما يلي :
(i) إذا كانت:
(أ) $F_0 > 1$ فتحسب المساحة على يمين F_0 وتضرب في 2 .
(ب) $F_0 < 1$ فتحسب المساحة على يسار F_0 وتضرب في 2 .
(ii) تحسب المساحة على يمين F_0.
(iii) تحسب المساحة على يسار F_0.
ويكون رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار α إذا كانت $P < \alpha$.

إيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة للنسبة بين التباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

يمكن الحصول على حدود ثقة للنسبة بين التباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ من العلاقة التالية :

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$$

مثال :

أخذت عينتان مستقلتان لمستخدمين لمنتجين متنافسين ، وذلك لدراسة الإختلاف في درجة الإقتناع بهما. فكانت الدرجات (بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي) كما يلي :

المنتج الأول	1.01	1.88	1.62	1.41	1.66	1.75	1.39	1.12	1.44	1.37
المنتج الثاني	3.23	3.75	2.85	2.61	1.93	2.55	3.55	3.17	3.42	3.19

(i) إختبر عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ إختلاف تباين المجتمعين .
(ii) أوجد القيمة P لهذا الإختبار .
(iii) أوجد 95% حدود ثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى الثاني .

الحل :

(i) فروض الإختبار : $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad , \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

ولحساب F_0 ، نوجد $s_1^2 = 0.0733167$ ، $s_2^2 = 0.297228$ ، وبالتالي :

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.246668$$

ثم نقارنها مع $F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = 0.248386$ و $F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = 4.02599$

وبالتالي نرفض فرض العدم ، مما يعني إختلافاً في التباين .

(ii) تكون القيمة $P = 0.0489445$ ، وهي أصغر من 0.05 .
وبالتالي نرفض فرض العدم ، مما يعني إختلافاً في التباين .

(iii) 95% حدود ثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى الثاني :

$$0.0612689 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 0.993085$$

الفصل الثالث

تحليل التباين بعامل واحد باتجاه واحد (التصميم التام العشوائي) :
Completely Randomized Design CRD:

إذا كان هناك عدد من المعالجات (أو عدد من مستويات عامل واحد) مقداره a . وأخذت عينة عشوائية من كل واحد منها ، فإن المردود (الناتج) يرمز له بالرمز y_{ij} أي المفردة رقم i من المعالجة (المستوى) j حيث $j = 1,2,...,a$ ، و $i = 1,2,...,n_j$ ، كما في الجدول التالي

المعالجة (المستوى)				
1	2	3	…	a
y_{11}	y_{12}	y_{13}	…	y_{1a}
y_{21}	y_{22}	y_{23}	…	y_{2a}
…	…	…	…	…
$y_{n_1 1}$	$y_{n_2 2}$	$y_{n_3 3}$	…	$y_{n_a a}$

ويمكن تمثيل الناتج (المردود) بالنموذج التالي :

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \ , \quad j=1,2,\ldots,a \quad ; i=1,2,\ldots,n_j$$

حيث : μ : المتوسط العام الموجود في جميع المشاهدات ، τ_j : تأثير المعالجات ،

ε_{ij} :الخطأ العشوائي الناتج من تأثير المعالجة j على المفردة i ، ولاستكمال التحليل يفرض أن يكون متغيراً عشوائياً مستقلاً من معالجة إلى معالجة ومن مفردة إلى مفردة لنفس المعالجة ، ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 ، وتباين σ^2 .

ويشترط في المفردات الداخلة في التجربة أن تكون متجانسة أي متشابهة بحيث إذا كانت هناك فروق بين المعالجات يمكن اكتشافها . ويشترط أيضاً أن توزع توزيعاً عشوائياً على المعالجات بحيث نقلل الخطأ العشوائي خصوصاً إذا كان هناك بعض الاختلاف بين المفردات ولم تكن هذه المفردات متشابهة تماماً .

ينقسم هذا النموذج إلى قسمين :

أ) التأثيرات الثابتة ، وتنتج عندما يقوم الباحث باختيار معالجات بعينها . وبالتالي تكون نتيجة الدراسة محصورة في المعالجات المختارة ولا تتجاوزها إلى غيرها .

ب) التأثيرات العشوائية ، وتنتج عندما يختار الباحث عدداً معيناً من المعالجات بصورة عشوائية من بين عدد كبير من معالجات . وبالتالي يمكن تعميم النتيجة على تلك المعالجات التي تم الاختيار منها سواء دخلت في العينة أم لا.

تحليـــــــل التـــــــأثيرات الثابتـــــــة :

يكون متوسط المفردة i للمعالجة j كما يلي :

$$E(y_{ij}) = \mu_j = \mu + \tau_j \qquad , \qquad j = 1,2,\ldots,a$$

وبالتالي لاختبار تساوي متوسطات المعالجات يكون الفرض:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a \quad , \quad H_1 = \mu_j \neq \mu_k \text{, لواحدة } k \text{ و } j \text{ على الأقل .}$$

ويمكن وضع الإختبار بصورة أخرى على النحو التالي :

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$

$$H_1 = \tau_j \neq 0 \quad \text{، على الأقل } j \text{ لواحدة}$$

ويكون التحليل بالحصول على مجاميع المربعات الكلي ، وبين المعالجات ، والخطأ .

نظرية "كوكران" :

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين (عن بعضهما) يتبعان توزيع كاي تربيع (χ^2) بدرجتي حرية m و n بالترتيب ، فإن : $\dfrac{X/m}{Y/n}$ تتبع توزيع F بدرجة حرية m و n . أي

$$\frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}$$

وبافتراض أن فرض العدم H_0 صحيحاً أي أن: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a = \mu$

فإن مجموع المربعات الكلي SS_T ومجموع المربعات بين المعالجات SS_{tr} ومجموع مربعات الخطأ SS_E متغيرات عشوائية مستقلة ، مقسومة على مقدار ثابت σ^2 تتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية ، $N-1$ و $a-1$ و $N-a$ بالترتيب . وبالتالي تكون القيمة F_0 :

$$F_0 = \frac{SS_{tr}/a-1}{SS_E/N-a} = \frac{MS_{tr}}{MS_E}$$

تتبع توزيع F بدرجتي حرية $a-1$ و $N-a$.

فإذا كانت $F_0 > F$ يرفض فرض العدم ، وإلاّ فلا .

مثال :

تدرس ست شعب مادة اللغة العربية باحداى المدارس . في نهاية الفصل أجري لها امتحان موحد. أخذت عينة عشوائية مستقلة من كل شعبة فكانت درجاتها كما يلي :

الشعبة					
1	2	3	4	5	6
60	85	84	34	53	70
71	83	75	68	50	90
63	90	83	78	73	69
80	53	81	46	81	69
62	85	79	69	77	70
61	86	67	73	50	85
68	65	90	65	80	62
83	68	95	57	54	73
65	51		52	88	62
	82		40	60	
				64	

ولمعرفة وجود اختلاف في درجات هذه الشعب الست، نستخدم جدول تحليل التباين لهذا النموذج من مخرجات الحاسب :

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \ , \quad j=1,2,\ldots,6 \quad ; i=1,2,\ldots,n_j$$

حيث $n_1 = 9, \quad n_2 = 10, \quad n_3 = 8, \quad n_4 = 10, \quad n_5 = 11, \quad n_6 = 9$

جدول تحليل التباين					
مصدر الإختلاف	درجة الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	P
المعالجات	5	2946	589	3.96	0.004
الخطأ	51	7584	149		
المجموع	56	10530			

يمكن أن نفهم العلاقة بين عناصر هذا النموذج وجدول تحليل التباين في أن عناصر هذا النموذج أربعة . ننقل العنصر μ المكوّن لمعامل التصحيح ، من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر، ويطرح من العنصر الموجود في الطرف الأيسر Y_{ij} المكوّن للمجموع الكلي غير المصحح ، فيعطيان معاً المجموع الكلي المصحح ، الذي يمثله السطر الأخير في الجدول. العنصر τ_j يعطي سطر المعالجات . والعنصر ε_{ij} يعطي سطر الخطأ .

ينبغي ملاحظة أنه في بعض البرامج يُفرد سطر مستقل لمعامل التصحيح ، بدرجة حرية واحد صحيح ، وسطر آخر للمجموع الكلي غير المصحح ، بدرجة حرية n. مما ينتج عنهما ، بالطرح ، المجموع الكلي المصحح بدرجة حرية $n-1$.

لنفرض أننا سنستخدم $\alpha = 0.05$ لمعرفة الاختلاف في درجات هذه الشعب إن وجد. تكون الفروض لذلك كالتالي :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_6$$

$H_1 = \mu_j \neq \mu_k$ لواحدة k و j على الأقل ،

من الجدول نلاحظ أن $F_0 = 3.96$ ونعرف أن $F_{0.05,5,51} = 2.39660$ ، أي أن $F_0 > F_{0.05,5,51}$ ، هذا يؤدي إلى رفض فرض العدم. مما يعني وجود شعبتين على الأقل بمتوسطين مختلفين. نحتاج للقيام باختبارات إضافية لمعرفة المتوسطات المتشابهة والمختلفة.

ولإيجاد القيمة P ، نوجد المساحة على يمين $F_0 = 3.96$ فتعطينا $P = 0.0041307$ ، وهي أصغر من $\alpha = 0.05$ ، وبالتالي يرفض فرض العدم ، أي أنه توجد شعبتان على الأقل لها متوسطات مختلفة .

تقدير معالم النموذج:

يمكن تقدير المتوسط العام لجميع المعالجات μ بالمتوسط العام للعينة $\bar{y}_{..}$ ، وتقدير تأثير المعالجة j ، τ_j بالفرق بين متوسط المعالجة j ، $\bar{y}_{.j}$ والمتوسط العام $\bar{y}_{..}$ ، أي أن :

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad , \quad \hat{\tau}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

كما يمكن الحصول على تقدير لمتوسط المعالجة j ، μ_j من التالي : $\hat{\mu}_j = \bar{y}_{.j}$ ،
والحصول على $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة له كما يلي :

$$\bar{y}_{.j} - t_{\frac{\alpha}{2},N-a}\sqrt{\frac{MS_E}{n_j}} \leq \mu_{.j} \leq \bar{y}_{.j} + t_{\frac{\alpha}{2},N-a}\sqrt{\frac{MS_E}{n_j}}$$

ويمكن أيضاً، إختبار μ_j ، يختلف ، أو يزيد ، أو يقل ، عن قيمة معينة μ_0 بحساب القيمة t_0

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{.j} - \mu_0}{\sqrt{\frac{MS_E}{n_j}}}$$

ثم مقارنتها بقيمة t كما في السابق ولكن بدرجة حرية $N-a$.

كذلك يمكن الحصول على $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين متوسطين $\mu_{.j} - \mu_{.k}$ كما يلي:

$$\mu_{.j} - \mu_{.k} = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{.k} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, N-a} \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right)}$$

ويمكن أيضاً، إختبار الفرق بين متوسطين $\mu_{.j} - \mu_{.k}$ ، يختلف ، أو يزيد ، أو يقل ، عن قيمة معينة μ_0 بحساب القيمة t_0 كما يلي :

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{.k} - \mu_0}{\sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right)}}$$

ثم مقارنتها بقيمة t كما في السابق ولكن بدرجة حرية $N-a$.

مثال :

في المثال السابق أوجد :

أ) تقدير المتوسط العام ، μ .

ب) تقدير تأثير المعالجة 4 ، τ_4 .

ج) 90% فترة ثقة لمتوسط المعالجة 2 ، μ_2 .

د) 90% فترة ثقة للفرق بين متوسطي المعالجتين 1 و 5 ، $(\mu_1 - \mu_5)$.

الحل :

أ) تقدير المتوسط العام ، μ : $\hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{3977}{57} = 69.7719$

ب) تقدير تأثير المعالجة 4 ، τ_4 : $\hat{\tau}_4 = \bar{y}_{.4} - \bar{y}_{..} = 58.2 - 69.7719 = -11.5719$

ج) 90% فترة ثقة لمتوسط المعالجة 2 ، μ_2 : $\mu_2 = 74.8 \pm 1.67528\sqrt{14.9}$

$\mu_2 = 74.8 \pm 6.46669$,

$$68.3333 \le \mu_2 \le 81.2667$$

د) 90% فترة ثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_5)$: $\mu_1 - \mu_5 = 1.74747 \pm 1.67528 * 5.48644$

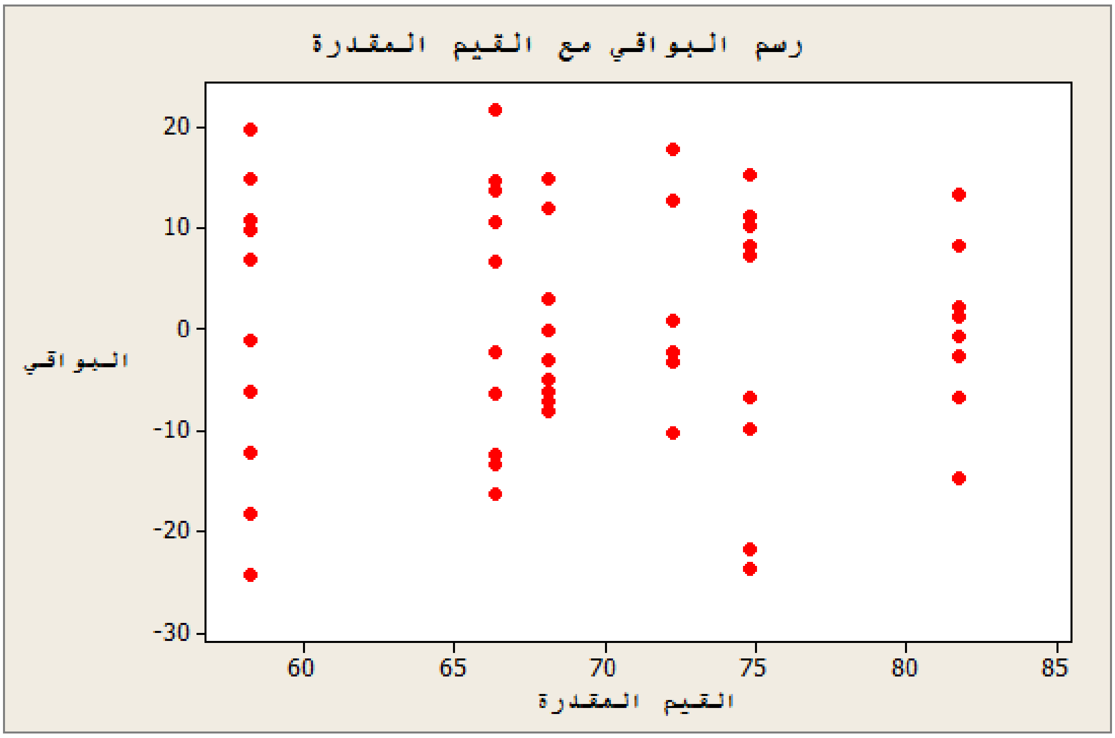
$\mu_1 - \mu_5 = 1.74747 \pm 9.19135$,

$$-7.44387 \le \mu_1 - \mu_5 \le 10.9388$$

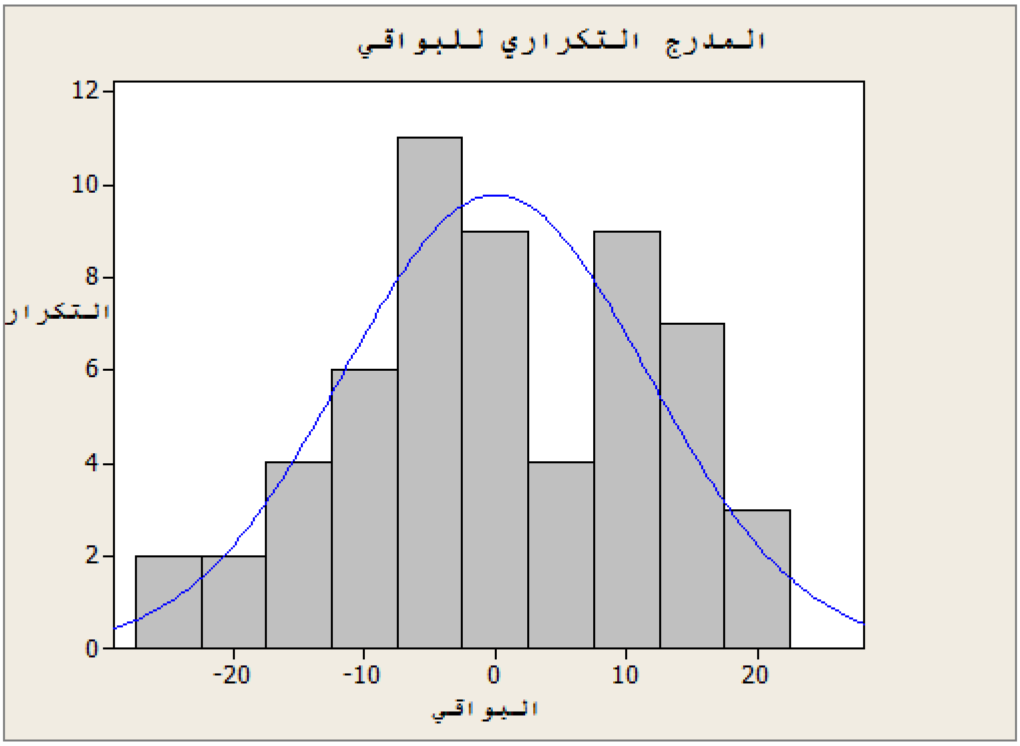
حيث أن فترة الثقة هذه تشمل الصفر ، فإن هذا يعني عدم وجود اختلاف بين المعاجتين 1 و 5 ، بدرجة ثقة 90%.

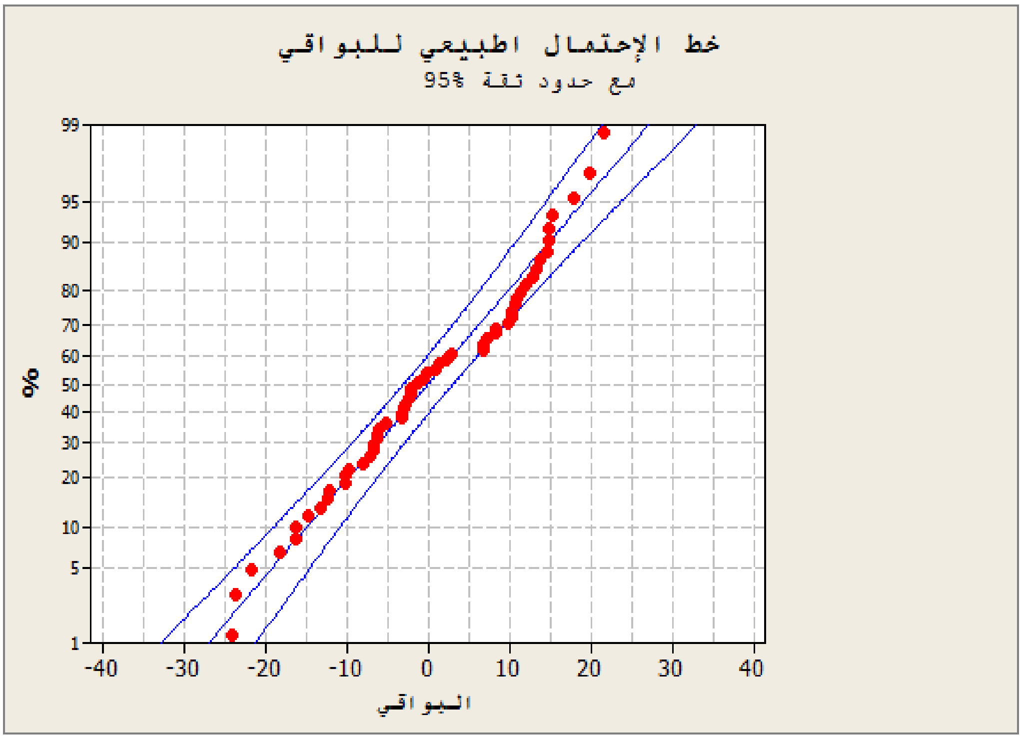
فحص ملائمة النموذج

ينبغي التأكد من انطباق الاشتراطات والفرضيات الموضوعة على النموذج حتى يمكن الاستمرار في التحليل والوصول إلى النتائج :
ويتم ذلك على النحو التالي :



أ) الخطأ الناتج من التجربة ε_{ij} متغير عشوائي مستقل ويتم التأكد من ذلك برسم الخطأ الناتج من النموذج e_{ij} (بعد توفيقه والذي يعتبر مقدراً غير متحيز لخطأ التجربة) مقابل القيم الناتجة من النموذج $\hat{y}_{ij}$ المناظرة لبيانات العينة y_{ij}. (أنظر الرسم في الشكل السابق) فإذا أخذت شكل انتشار عشوائي فيمكن القول بأن الشرط تحقق ، أما إذا أخذت قالباً منتظماً ، أي شكلاً محدداً ، فيدل ذلك على عدم عشوائية الخطأ واستقلاله .





ب) الخطأ الناتج من التجربة ε_{ij} يتبع التوزيع الطبيعي . ويتم التأكد من ذلك برسم مدرج تكراري للخطأ الناتج من النموذج e_{ij}، فإذا أمكن توفيقه بمنحنى قريب من منحنى التوزيع الطبيعي ، مركزه الصفر دلّ ذلك على قبول فرضية توزع الأخطاء توزيعاً طبيعياً .
كذلك يمكن رسم خط الاحتمالات الطبيعي للخطأ في النموذج e_{ij} ، فإذا كانت معظم النقاط (خصوصاً التي في الوسط) على خط مستقيم فإنه يؤدي إلى قبول فرضية التوزيع الطبيعي .
(أنظر الرسم في الشكلين السابقين).

ج) الخطأ الناتج من التجربة ε_{ij} له تباين ثابت σ^2. ويتم التأكد من ذلك برسم الخطأ الناتج من النموذج e_{ij} (بعد توفيقه والذي يعتبر مقدراً غير متحيز لخطأ التجربة) مقابل القيم الناتجة من النموذج $\hat{y}_{ij}$ المناظرة لبيانات العينة y_{ij} (أو مقابل متوسطات المشاهدات نفسها). فإذا كان إنتشارها واحداً دل ذلك على ثبات التباين ، وإلاّ فلا. (أنظر الرسم في الشكل السابق الأول).

إختبارات تطابق تباينات المجتمعات المدروسة :

أ) عندما تتوزع المجتمعات توزيعاً طبيعياً ، يستخدم اختبار "بارتليه" (Bartlett) لاختبار اختلاف تبايناتها كالتالي :

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_a^2$

$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_k^2$ ، لواحدة على الأقل k و i

ويكون ذلك بحساب القيمة χ_0^2 ، ثم مقارنتها بقيمة $\chi^2_{\alpha,a-1}$ ، ويكون رفض فرض العدم إذا كانت χ_0^2 أكبر ، أو إذا كانت القيمة P أصغر من قيمة α.

ب) عندما تتوزع المجتمعات توزيعاً غير طبيعي وتكون متصلة ، يستخدم اختبار "ليفين" (Levene) لاختبار اختلاف تبايناتها كالتالي :

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_a^2$

$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_k^2$ ، لواحدة على الأقل k و i

ويكون ذلك بحساب القيمة F_0 ، ثم مقارنتها بقيمة $F_{\alpha,a-1,N-a}$ ، ويكون رفض فرض العدم إذا كانت F_0 أكبر ، أو إذا كانت القيمة P أصغر من قيمة α .

مثال :

إختبر في المثال السابق عند مستوى معنوي للاختبار $\alpha = 0.15$ الاختلاف في تباينات درجات هذه الشعب :

أ) إذا فرض أن درجات هذه الشعب تتبع التوزيع الطبيعي .

ب) إذا فرض أن درجات هذه الشعب تتبع توزيعاً متصلاً غير طبيعي.

الحل : من مخرجات الحاسب :

أ) باستخدام اختبار "بارتليه" نجد أن $\chi_0^2 = 5.46$ ، وأن $\chi_{0.15,5}^2 = 8.1152$ ، وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ، أي أنه لايوجد اختلاف في تباينات درجات هذه الشعب عند $\alpha = 0.15$. كما نلاحظ أن $P = 0.362$ وهي أكبر من $\alpha = 0.15$ ، وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ، أي أنه لايوجد اختلاف في تباينات درجات هذه الشعب عند $\alpha = 0.15$.

ب) باستخدام اختبار "ليفن" نجد أن $F_0 = 1.48$ ، وأن $F_{0.15,5,51} = 1.70632$ ، وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ، أي أنه لايوجد اختلاف في تباينات درجات هذه الشعب عند $\alpha = 0.15$. كما نلاحظ أن $P = 0.214$ وهي أكبر من $\alpha = 0.15$ ، وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ، أي أنه لايوجد اختلاف في تباينات درجات هذه الشعب عند $\alpha = 0.15$.
اهـ

المقارنات :

يمكن مقارنة أو إختبار أي مجموعة من المتوسطات كما يلي :

$$C = \sum_{j=1}^{j=a} c_j \mu_j$$

أ) إذا كانت جميع العينات متساوية الأحجام ، فيشترط أن مجموع المعاملات c_j يساوي الصفر، أي أن $\sum_{j=1}^{j=a} c_j = 0$ ، ويتم حساب مجموع مربعات المقارنة (أو الإختبار) كالتالي :

$$SS_c = \frac{(\sum_1^a c_j y_j)^2}{n\sum_1^a c_j^2} \quad Or \quad \frac{n(\sum_1^a c_j \bar{y}_j)^2}{\sum_1^a c_j^2}$$

حيث : y_j هو مجموع العينة j و $\bar{y}_j$ هو متوسط العينة j .

ب) إذا كانت أحجام العينات مختلفة $n_a,...,n_2,n_1$ ، فيشترط أن مجموع حاصل ضرب المعاملات c_j في حجم العينة المناظر n_j يساوي الصفر. أي أن $\sum_{j=1}^{j=a} n_j c_j = 0$ ، ويتم حساب مجموع مربعات المقارنة (أو الإختبار) كالتالي :

$$SS_c = \frac{(\sum_1^a c_j y_j)^2}{\sum_1^a n_j c_j^2} \quad Or \quad \frac{(\sum_1^a n_j c_j \bar{y}_j)^2}{\sum_1^a n_j c_j^2}$$

حيث : y_j هو مجموع العينة j و $\bar{y}_j$ هو متوسط العينة j .

بعد ذلك يتم حساب القيمة F_0 ، حيث $F_0 = \frac{SS_c}{MS_E}$ ، ثم مقارنتها بالقيمة $F_{\alpha,1,N-a}$. ويكون رفض فرض العدم إذا كانت F_0 أكبر.

ملاحظة :
يمكن القيام بالمقارنة باستخدام t_0 ، حيث يمكن الحصول عليها بأخذ الجذر التربيعي ل F_0 . ثم مقارنتها بالقيمة $t_{\frac{\alpha}{2},N-a}$ من توزيع t .

مثال 1:

في المثال السابق إذ فُرض أن الشعبة الثانية يدرّسها المدرس زيد ، والشعبتين الأولى والرابعة يدرّسهما المدرس عُبيد . إختبر عند مستوى معنوي $\alpha = 0.02$ ، أن متوسط الشعبة الثانية يختلف عن متوسط الشعبتين ألأولى والرابعة. أي نريد أن نعرف فيما إذا كان هناك فرق بين زيد وعُبيد .
الحل :

$$H_0 : 2\mu_2 = \mu_1 + \mu_4 \quad , \quad H_1 : 2\mu_2 \neq \mu_1 + \mu_4$$ [1]

$$SS_c = \frac{(\sum_1^a c_j y_j)^2}{\sum_1^a n_j c_j^2} = \frac{(10*613 - 18*748 + 9*582)^2}{(100*9 + 324*10 + 81*10)} = \frac{(-2096)^2}{4950} = 887.5184$$

$$F_0 = \frac{887.5184}{149} = 5.9565 \quad , \quad F_{0.02,1,51} = 5.76825$$

وعليه يُرفض فرض العدم أي يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 2 ومتوسط الشعبتين 1 و4 ، عند مستوى معنوي $\alpha = 0.02$.

---

[1] $C' : 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$

$n : 9 \quad 10 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 9$, $C : \frac{1}{9} - \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10-18+9}{90}$

$C : 10 \quad -18 \quad 0 \quad 9 \quad 0 \quad 0$

كما نجد $P = 0.0181758$ وهي أصغر من $\alpha = 0.02$، وبالتالي يُرفض فرض العدم أي يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 2 ومتوسط الشعبتين 1 و4، عند مستوى معنوي $\alpha = 0.02$.
ويمكن الوصول إلى نفس النتائج باستخدام برنامج "SAS" كالتالي :
جدول تحليل التباين :

```
Dependent Variable: Y

                Sum of
Source DF   Squares    Mean Square  F Value  Pr > F
Model    5 2946.34519 589.26904      3.96    0.0041
Error   51 7583.68990 148.69980
Corrected
Total   56 10530.03509
```

المقارنة :

```
Contrast DF Contrast SS Mean Square FValue Pr > F
1+4 vs 2 1  887.5183838 887.5183838 5.97   0.0181
```

كما يمكن القيام بالمقارنة باستخدام t_0 كما يلي:

$$t_0 = \sqrt{F_0} = \sqrt{5.9565} = 2.44059$$

ثم مقارنتها بقيمة $t_{\frac{\alpha}{2},51}$ عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.02$ من توزيع t
$t_{0.025,51} = 2.40172$ فنجدها أكبر وبالتالي نرفض فرض العدم ونقول بوجود اختلاف بين متوسط الشعبة 2 ومتوسط الشعبتين 1 و 4 ، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.02$.
أو الحصول على القيمة P منها باستخدام توزيع t، فتكون $P = 0.0181758$ فنجدها أصغر من $\alpha = 0.02$، وبالتالي نرفض فرض العدم أي يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 2 ومتوسط الشعبتين 1 و 4 ، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.02$.

كما يمكن القيام بالمقارنة باستخدام t_0 والحصول على نفس النتيجة باستخدام برنامج "SPSS" كما يلي:
جدول تحليل التباين :

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	2946.345	5	589.269	3.963	.004
Within Groups	7583.690	51	148.700		
Total	10530.035	56			

المقارنة :

		Contrast	Value of Contrast	Std. Error	t	df	Sig. (2-tailed)
VAR00001	**Assume equal variances**	**1**	-23.2889	9.53269	-2.443	51	.018
	Does not assume equal variances	**1**	-23.2889	10.61818	-2.193	15.377	.044

مثال 2:
أجريت دراسة لمعرفة أثر الرصاص الموجود في وقود السيارات على كمية أول أكسيد الكربون الناتجة من عادم السيارات. أختيرت خمس نسب من الرصاص في الوقود ، وعولجت عشوائياً بكل واحدة منها سبع سيارات من نفس الماركة والفئة. كانت النتيجة كما يلي:

المعالجات (نسب الرصاص)				
1	2	3	4	5
0.01496	0.01338	0.01384	0.01728	0.01326
0.01374	0.01551	0.01217	0.01317	0.01476
0.01359	0.01381	0.01154	0.01844	0.01944
0.01450	0.01465	0.01075	0.01419	0.02039
0.01216	0.01709	0.01122	0.01474	0.01038
0.01091	0.01417	0.00842	0.01584	0.01795
0.01216	0.01390	0.01147	0.01634	0.02095

نلاحظ وجود الصفر على يمين العلامة العشرية، فنحتاج إلى التخلص منه (من أجل الدقة في الحساب ، لأنه يحجز خانة عشرية بدون داع) وذلك باستخدام الترميز. أي بضرب كل القيم المشاهدة في 10. وينبغي الإنتباه إلى أن إعادة القيم إلى طبيعتها في جدول تحليل التباين يستدعي قسمة مجاميع المربعات على مربع المقدار 10، أي القسمة على 100.
فتكون البيانات بعد الترميز كما يلي:

المعالجات (نسب الرصاص)				
1	2	3	4	5
0.1496	0.1338	0.1384	0.1728	0.1326
0.1374	0.1551	0.1217	0.1317	0.1476
0.1359	0.1381	0.1154	0.1844	0.1944
0.1450	0.1465	0.1075	0.1419	0.2039
0.1216	0.1709	0.1122	0.1474	0.1038
0.1091	0.1417	0.0842	0.1584	0.1795
0.1216	0.1390	0.1147	0.1634	0.2095

ويكون جدول تحليل التباين قبل إزالة أثر الترميز وباستخدام الحاسب

```
Source  DF        SS         MS      F      P
F        4    0.012673  0.003168  6.15   0.001
Error   30    0.015462  0.000515
Total   34    0.028136
```

وبعده

```
Source  DF        SS           MS           F      P
F        4    0.00012673  0.00003168  6.15   0.001
Error   30    0.00015462  0.00000515
Total   34    0.00028136
```

فإذا طلب مقارنة متوسط المعالجتين الثانية والرابعة مع متوسط المعالجة الأولى فتكون المقارنة كالتالي :

$$H_1 : 2\mu_1 \neq \mu_2 + \mu_4 \quad , \quad H_0 : 2\mu_1 = \mu_2 + \mu_4$$

ويكون مجموع مربعاتها كما يلي:

$$SS_c = \frac{n(\sum_1^a c_j \bar{y}_j)^2}{\sum_1^a c_j^2} = \frac{7(0.0157143 + 0.0146443 - 2 * 0.0131457)^2}{6}$$

$$SS_c = \frac{7(0.0040671)^2}{6} = \frac{0.0001158}{6} = 0.0000193$$

ومنها نحصل على

$$F_0 = \frac{SS_c}{MS_E} = \frac{0.0000193}{0.00000515} = 3.7473$$

وبمقانتها مع قيمة $F_{.05,1,30} = 4.17088$ نجدها أصغر وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.05$. ويؤكد ذلك القيمة $P = 0.0623662$، حيث أنها أكبر من $\alpha = 0.05$.

وهذا يعني عدم وجود اختلاف بين متوسط المعالجتين الثانية والرابعة ومتوسط المعالجة الأولى.

ويمكن استخدام برنامج "SAS" كما يلي:

جدول تحليل التباين :

```
Dependent Variable: Y
                    Sum of
Source       DF    Squares      Mean Square   F Value     Pr > F

Model         4   0.00012673    0.00003168      6.15      0.0010
Error        30   0.00015462    0.00000515
Corrected
Total        34   0.000281
```

المقارنة :

```
Contrast     DF   Contrast SS   Mean Square   F Value     Pr > F
2+4 vs 1      1   0.00001930    0.00001930      3.74      0.0625
```

كما يمكن القيام بالمقارنة باستخدام t_0 كما يلي:

$$t_0 = \sqrt{F_0} = \sqrt{3.7473} = 1.93579$$

ثم مقارنتها بقيمة $t_{\frac{\alpha}{2},30}$ وعند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.05$ من توزيع t

$t_{0.025,30} = 2.04227$ فنجدها أصغر وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ونقول بعدم وجود اختلاف بين متوسط الشعبة 1 ومتوسط الشعبتين 2 و 4.

أو الحصول على القيمة P منها ومن توزيع t فتكون $P = 0.0623668$ فنجدها أكبر من $\alpha = 0.05$، وبالتالي لا نستطيع رفض فرض العدم أي لايوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 1 ومتوسط الشعبتين 2 و 4.

كما يمكن القيام بالمقارنة باستخدام t_0 والحصول على نفس النتيجة باستخدام برنامج "SPSS" كما يلي:

جدول تحليل التباين :

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.000	4	.000	6.147	.001
Within Groups	.000	30	.000		
Total	.000	34			

المقارنة :

		Contrast	Value of Contrast	Std. Error	t	df	Sig. (2-tailed)
VAR00003	**Assume equal variances**	1	.0040671	.00210185	1.935	30	.062
	Does not assume equal variances	1	.0040671	.00138281	2.941	12.709	.012

المقارنات التعامدة (المستقلة) :

يقال أن المقارنتين $C_1 = \sum_1^a c_j y_j$ و $C_2 = \sum_1^a d_j y_j$ متعامدتان :

أ) إذا كانت جميع العينات متساوية الأحجام ، وكان $\sum_1^a c_j d_j = 0$

ب) إذا كانت أحجام العينات مختلفة ، وكان $\sum_1^a n_j c_j d_j = 0$

مثال :

في المثال 1 السابق إختبر عند مستوى معنوي $\alpha = 0.01$، أن متوسط الشعبة الثالثة يختلف عن متوسط الشعبة الخامسة. ثم بين فيما إذا كان متعامداً مع الإختبار في المثال 1 السابق أم لا.

الحل :

$$H_0 : \mu_3 = \mu_5 \quad , \quad H_1 : \mu_3 \neq \mu_5$$

$$SS_c = \frac{(11*654-8*730)^2}{(121*8+64*11)} = \frac{(1354)^2}{1672} = 1096.48$$

$$F_0 = \frac{1096.48}{148.7} = 7.37377 \quad , \quad F_{0.01,1,51} = 7.15949$$

وبالتالي يرفض فرض العدم ، بمعنى أنه يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 3 ومتوسط الشعبة 5، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.01$.

كما نجد أن $P = 0.0090109$ وهي أصغر من $\alpha = 0.01$ ، وبالتالي يرفض فرض العدم أي يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 3 ومتوسط الشعبة 5 ، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.01$.

ويمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام برنامج "SAS" كما يلي:

جدول تحليل التباين

```
                  Sum of
Source   DF      Squares      Mean Square      F Value      Pr > F
Model     5   2946.34519        589.26904         3.96      0.0041
Error    51   7583.68990        148.69980
Corrected
Total    56  10530.03509
```

الإختبار

```
Contrast   DF   Contrast SS    MeanSquare     F Value   Pr > F
3 vs 5      1   1096.480861    1096.480861     7.37     0.0090
```

ويمكن استبدال t_0 ب F_0 لحل هذا المثال بأخذ الجذر التربيعي ل F_0 على النحو التالي:

$$t_0 = \sqrt{F_0} = \sqrt{7.37377} = 2.71547$$

ثم مقارنتها بقيمة $t_{\frac{\alpha}{2},51}$ وعند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.01$ من توزيع t

$t_{0.005,51} = 2.67572$ فنجدها أكبر وبالتالي يرفض فرض العدم ، بمعنى أنه يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 3 ومتوسط الشعبة 5، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.01$.

أو الحصول على القيمة P منها فتكون $P = 0.0090109$ فنجدها أصغر من $\alpha = 0.01$، وبالتالي يرفض فرض العدم ، بمعنى أنه يوجد اختلاف بين متوسط الشعبة 3 ومتوسط الشعبة 5، عند مستوى معنوي للإختبار $\alpha = 0.01$.

ويمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام برنامج "SPSS" كما يلي:

جدول تحليل التباين

ANOVA

VAR00001

Sig.	F	Mean Square	df	Sum of Squares	
.004	3.963	589.269	5	2946.345	Between Groups
		148.700	51	7583.690	Within Groups
			56	10530.035	Total

الإختبار

		Contrast	Value of Contrast	Std. Error	t	df	Sig. (2-tailed)
VAR00003	Assume equal variances	1	15.3864	5.66618	2.715	51	.009
	Does not assume equal variances	1	15.3864	5.18996	2.965	16.699	.009

ولمعرفة تعامد الإختبارين نجد أن $\sum_{1}^{a} n_j c_j d_j = 0$ ، كما يبينه الجدول التالي :

j	1	2	3	4	5	6
n_j	9	10	8	10	11	9
c_j	10	-18	0	9	0	0
d_j	0	0	11	0	-8	0
nc_jd_j	0	0	0	0	0	0

وعليه فإن المقارنتين المذكورتين متعامدتان. اهـ

المقارنات باستخدام طريقة "شفيه" Scheffe :

يمكن بهذه الطريقة القيام ببعض الاختبارات التي نراها مهمة بعد رفض فرض العدم ، وذلك على النحو التالي :

$$H_0 : \sum_1^a c_j \mu_j = 0 \quad , \quad \sum_1^a c_j \mu_j \neq 0$$

ويكون ذلك بحساب القيمة F_0 كما يلي :

$$F_0 = \frac{(\sum c_j y_j)^2}{(a-1)MS_E \sum n_j c_j^2}, \quad Or \quad F_0 = \frac{(\sum c_j \bar{y}_j)^2}{(a-1)MS_E \sum \frac{c_j^2}{n_j}}$$

ثم مقارنتها بالقيمة $F_{\alpha, a-1, N-a}$ ، ويرفض فرض العدم إذا كانت F_0 أكبر.

ولحساب القيمة P ، تُوجد المساحة عن يمين F_0 في توزيع $F_{a-1, N-a}$.

ثم لإيجاد $100(1-\alpha)\%$ حدود ثقة لهذه المقارنة ، نستخدم العلاقة التالية :

$$\sum c_j \mu_j = \sum c_j \bar{y}_j \pm \sqrt{(a-1)MS_E F_{\frac{\alpha}{2}, a-1, N-a} \sum \frac{c_j^2}{n_j}}$$

مثال :

في المثال 1 السابق إختبر عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$، أن متوسط الشعبة الثانية يختلف عن متوسط الشعبتين الرابعة والخامسة، باستخدام طريقة "شفيه". ثم أوجد 95 % حدود ثقة لهذا الاختبار.

الحل :

$$H_0 : 2\mu_2 = \mu_4 + \mu_5 \quad , \quad H_1 : 2\mu_2 \neq \mu_4 + \mu_5$$

$$F_0 = \frac{(-22*74.8 + 11*58.2 + 10*66.36)^2}{(5)148.7(48.4 + 12.1 + 9.091)} = \frac{116827}{51740.8} = 2.25793$$

$$F_{.05,5,51} = 2.39660$$

$$P = 0.0624819$$

وبالتالي لانستطيع رفض فرض العدم ، أي إنه لايوجد اختلاف بين المجموعتين عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$.

ولحساب 95 % حدود ثقة لهذا الاختبار نجد أن.

$$F_{.025,5,51} = 2.82716$$

$$-341.8 - 382.488 = -724.288 \leq \sum c_j \mu_j \leq -341.8 + 382.488 = 40.6877$$

وحيث أن الصفر داخل هذه الفترة فإنه لايوجد اختلاف بين المجموعتين بدرجة ثقة 95 %.

مثال :

في المثال 2 السابق إختبر عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$، أن متوسط الشعبة الخامسة يختلف عن متوسط الشعبتين الثانية والثالثة ، باستخدام طريقة "شفيه". ثم أوجد 95% حدود ثقة لهذا الاختبار.

الحل :

$$H_0 : 2\mu_5 = \mu_3 + \mu_2 \qquad , \qquad H_1 : 2\mu_5 \neq \mu_3 + \mu_2$$

باستخدام البيانات بعد الترميز (للمحافظة على دقتها) نجد

$$F_0 = \frac{7(-2 * 0.167329 + 0.113443 + 0.146443)^2}{(4).000515(4+1+1)} = \frac{0.0391354}{0.01236} = 3.16629$$

$$F_{.05,4,30} = 2.68963$$
$$P = 0.0276907$$

وبالتالي نرفض فرض العدم ، أي إنه يوجد اختلاف بين المجموعتين عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$.

ولحساب 95 % حدود ثقة لهذا الاختبار نجد أن.

$$F_{.025,4,30} = 3.24993$$

$$\text{-} 0.0747720 - .0757525 \leq \sum c_j \mu_j \leq \text{-}0.0747720 + 0.0727525$$

$$\text{-} 0.1505245 \leq \sum c_j \mu_j \leq 0.0009805$$

وحيث أن الصفر داخل هذه الفترة فإنه لا يوجد اختلاف بين المجموعتين بدرجة ثقة 95 %.

ملاحظة :

في حالة العينات متساوية الأحجام يمكن حل المثال السابق باستخدام برنامج "SPSS" كما يلي:

للإختبار فإن : $F_0 = \dfrac{t_0^2}{a-1} = \dfrac{-3.557^2}{4} = 3.16306$

وبمقارنتها مع $F_{.05,4,30} = 2.68963$ ، نرفض فرض العدم ، أي إنه يوجد اختلاف بين المجموعتين عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$.

لحدود الثقة : حيث $\sum c_j \bar{y}_j = A$ ، $A \pm \sqrt{\dfrac{A^2}{F_0} F_{\frac{\alpha}{2},a-1,N-a}}$

$$\text{-} 0.074772 \pm \sqrt{\frac{(\text{-}0.074772)^2}{3.16306} 3.24993} = (-.150564, 0.0010198)$$

وحيث أن الصفر داخل هذه الفترة فإنه لا يوجد اختلاف بين المجموعتين بدرجة ثقة 95 %.

مقارنة أزواج المتوسطات :

بعد رفض فرض العدم الكلي ، أي بعد التأكد من وجود اختلاف بين المعالجات ، يمكن للباحث إجراء مقارنة لمتوسط مجتمع معين μ_j ، مع أي من متوسطات المجتمعات الأخرى μ_k ، مثنى مثنى .
وذلك باستخدام أحد الاختبارات التالية :

1) طريقة أقل فرق معنوي *The Least Significant Difference Method (LSD)*

أ) يكون الاختبار فيها بحساب القيمة t_0 على النحوالتالي :

$$t_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{MS_E(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k})}}$$

ويتم رفض فرض العدم إذا كان الإختبار من طرفين وعند :

1) $t_0 > t_{\frac{\alpha}{2}, N-a}$ أو $t_0 < t_{1-\frac{\alpha}{2}, N-a}$.

ويكون رفض فرض العدم إذا كان الإختبار من طرف واحد وعند :

2) $t_0 > t_{\alpha, N-a}$.

3) $t_0 < t_{1-\alpha, N-a}$.

ويمكن الحصول على القيمة P من توزيع t عند درجة حرية *N-a* .

ب) وتكون $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_j و μ_k على النحوالتالي :

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm t_{\frac{\alpha}{2}, N-a}\sqrt{MS_E(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k})}$$

وينصح بعدم الإكثار من عدد المقارنات وفترات الثقة ، وذلك للحفاظ على مستوى المعنوية α.

مثال 3:
أجريت تجربة لمعرفة مدة الإستجابة لمحفز معين لعدد من مستويات مادة مخدرة.أخذت عينة عشوائية متشابهة وقسمت إلى ست مجموعات ، عولجت كل مجموعة بواحدة من مستويات المادة المخدرة عشوائياً. قيست المدة اللازمة للإستجابة للمحفزفكانت النتيجة كما في الجدول التالي:

المستوى					
1	2	3	4	5	6
2.96	2.71	0.70	1.57	1.87	0.14
4.95	2.25	1.48	0.94	2.42	1.47
3.53	1.79	2.29	1.88	3.67	1.47
3.65	2.53	0.90	2.52	2.22	1.61
5.02	2.82	1.62	2.39	3.79	0.70

بيّن الإختلاف بين مستويات هذه المادة في الإستجابة لهذا المحفز عند مستوى $\alpha = 0.05$.

$$t_{0.025,24} = -2.06390 \quad , \quad t_{0.975,24} = 2.06390$$

	1	2	3	4	5
2	3.58577*				
3	5.87332*	2.28755*			
4	4.83922*	1.25345	-1.03410		
5	2.74864*	-0.837127	-3.12468*	-2.09058*	
6	6.58958*	3.00381*	0.71626	1.75036	3.84094*

ويمكن ترتيب المتوسطات ثم الربط بين التي لا يوجد بينها اختلاف معنوي، وذلك كما يلي:

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد

	1	2	3	4	5
2	3.58558*				
3	5.87301*	2.28743*			
4	4.83896*	1.25339	-1.03404		
5	2.74849*	-0.837082	-3.12451*	-2.09047*	
6	6.58923*	3.00365*	0.716220	1.75026	3.84073*

وباستخدام برنامج "SAS" نجد

i/j	1	2	3	4	5	6
1		3.585565	5.872985	4.838946	2.748485	6.589203
		0.0015	<.000	<.0001	0.011	<.0001
2	-3.58		2.2874	1.253381	-0.83708	3.003638
	0.0015		0.0313	0.2221	0.4108	0.0062
3	-5.87299	-2.28742		-1.03404	-3.1245	0.716218
	<.0001	0.0313		0.3114	0.0046	0.4808
4	-4.83895	-1.25338	1.034039		-2.09046	1.750257
	<.0001	0.2221	0.3114		0.0473	0.0928
5	-2.74849	0.837079	3.1245	2.09046		3.840717
	0.0112	0.4108	0.0046	0.0473		0.0008
6	-6.5892	-3.00364	-0.71622	-1.75026	-3.84072	
	<.0001	0.0062	0.4808	0.0928	0.0008	

وبإيجاد 95% حدود ثقة للفرق بين المتوسطات نجد:

	1	2	3	4	5
2	0.679919 2.52408				
3	1.70192 3.54608	0.099919 1.94408			
4	1.23992 3.08408	-0.362081 1.48208	-1.38408 0.46008		
5	0.305919 2.15008	-1.29608 0.548081	-2.31808 -0.473919	-1.85608 -0.0119193	
6	2.02192 3.86608	0.419919 2.26408	-0.602081 1.24208	-0.140081 1.70408	0.793919 2.63808

وباستخدام الحاسب نجد:

```
F    Lower   Center    Upper
2  -2.5241  -1.6020  -0.6799
3  -3.5461  -2.6240  -1.7019
4  -3.0841  -2.1620  -1.2399
5  -2.1501  -1.2280  -0.3059
6  -3.8661  -2.9440  -2.0219

F    Lower   Center    Upper
3  -1.9441  -1.0220  -0.0999
4  -1.4821  -0.5600   0.3621
5  -0.5481   0.3740   1.2961
6  -2.2641  -1.3420  -0.4199

F    Lower   Center   Upper
4  -0.4601   0.4620  1.3841
5   0.4739   1.3960  2.3181
6  -1.2421  -0.3200  0.6021

F    Lower   Center   Upper
5   0.0119   0.9340  1.8561
6  -1.7041  -0.7820  0.1401

F    Lower   Center    Upper
6  -2.6381  -1.7160  -0.7939
```

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد :

(I) VAR00002	**(J) VAR00002**	**Sig.**	**95% Confidence Interval**	
			Lower Bound	**Upper Bound**
1.00	**2.00**	.001	.6799	2.5241
	3.00	.000	1.7019	3.5461
	4.00	.000	1.2399	3.0841
	5.00	.011	.3059	2.1501

	6.00	.000	2.0219	3.8661
2.00	**1.00**	.001	-2.5241	-.6799
	3.00	.031	.0999	1.9441
	4.00	.222	-.3621	1.4821
	5.00	.411	-1.2961	.5481
	6.00	.006	.4199	2.2641
3.00	**1.00**	.000	-3.5461	-1.7019
	2.00	.031	-1.9441	-.0999
	4.00	.311	-1.3841	.4601
	5.00	.005	-2.3181	-.4739
	6.00	.481	-.6021	1.2421
4.00	**1.00**	.000	-3.0841	-1.2399
	2.00	.222	-1.4821	.3621
	3.00	.311	-.4601	1.3841
	5.00	.047	-1.8561	-.0119
	6.00	.093	-.1401	1.7041
5.00	**1.00**	.011	-2.1501	-.3059
	2.00	.411	-.5481	1.2961
	3.00	.005	.4739	2.3181
	4.00	.047	.0119	1.8561
	6.00	.001	.7939	2.6381
6.00	**1.00**	.000	-3.8661	-2.0219
	2.00	.006	-2.2641	-.4199
	3.00	.481	-1.2421	.6021
	4.00	.093	-1.7041	.1401
	5.00	.001	-2.6381	-.7939

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

i	j	Difference Between Means	95% Confidence Limits for LSMean(i)-LSMean(j)	
1	2	1.602000	0.679868	2.524132
1	3	2.624000	1.701868	3.546132
1	4	2.162000	1.239868	3.084132
1	5	1.228000	0.305868	2.150132
1	6	2.944000	2.021868	3.866132
2	3	1.022000	0.099868	1.944132
2	4	0.560000	-0.362132	1.482132
2	5	-0.374000	-1.296132	0.548132
2	6	1.342000	0.419868	2.264132

3	4	-0.462000	-1.384132	0.460132
3	5	-1.396000	-2.318132	-0.473868
3	6	0.320000	-0.602132	1.242132
4	5	-0.934000	-1.856132	-0.011868
4	6	0.782000	-0.140132	1.704132
5	6	1.716000	0.793868	2.638132

2) طريقة "توكي" *Tukey's Studentized Range Test*

أ) يكون الإختبار

$$H_0 : \mu_j = \mu_k \quad , \quad H_1 : \mu_j \neq \mu_k$$

بحساب القيمة T_0 على النحوالتالي :

$$T_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}} \quad , \quad j,k = 1,2,...,a$$

وفي حالة إختلاف أحجام العينات تستخدم الصيغة التالية:

$$T_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right)}} \quad , \quad j,k = 1,2,...,a$$

ويتم رفض فرض العدم إذا كانت :

$$.|T_0| > \frac{q_{\alpha,a,N-a}}{\sqrt{2}}$$

حيث $q_{\alpha,a,N-a}$ تمثل القيمة التي تكون المساحة على يمينها تساوي α في جدول توكي ، (*Studentized Range*).

ويمكن الحصول على القيمة P من جدول توكي عند درجة حرية a و N-a .

ب) وتكون $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_j و μ_k ، في حالة أحجام عينات متساوية ،على النحوالتالي :

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm q_{\alpha,a,N-a}\sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

أو

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm \frac{q_{\alpha,a,N-a}}{\sqrt{2}}\sqrt{MS_E\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}\right)}$$

في حالة أحجام عينات غير متساوية .

ولحل المثال 3 السابق نجد:

$$\frac{q_{0.05,6,24}}{\sqrt{2}} = \frac{4.37}{\sqrt{2}} = 3.09006$$

	1	2	3	4	5
2	3.58577*				
3	5.87332*	2.28755			
4	4.83922*	1.25345	-1.03410		
5	2.74864	-0.837127	-3.12468*	-2.09058	
6	6.58958*	3.00381	0.716258	1.75036	3.84094*

وبترتيب المتوسطات ثم الربط بين التي لا يوجد بينها اختلاف معنوي، نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد :

$$\frac{q_{0.05,6,24}}{\sqrt{2}} = \frac{4.37}{\sqrt{2}} = 3.09006$$

	1	2	3	4	5
2	3.58558*				
3	5.87301*	2.28743			
4	4.83896*	1.25339	-1.03404		
5	2.74849	-0.837082	-3.12451*	-2.09047	
6	6.58923*	3.00365	0.71622	1.75026	3.84073*

وبترتيب المتوسطات ثم الربط بين التي لا يوجد بينها اختلاف معنوي، نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

i/j	1	2	3	4	5	6
1		3.585565	5.872985	4.838946	2.748485	6.589203
		0.0165	<.0001	0.0008	0.1019	<.0001
2	-3.58556		2.28742	1.253381	-0.83708	3.003638
	0.0165		0.2376	0.8063	0.9574	0.0604
3	-5.87299	-2.28742		-1.03404	-3.1245	0.716218
	<.0001	0.2376		0.9017	0.0466	0.9781

4	-4.83895	-1.25338	1.034039		-2.09046	1.750257
	0.0008	0.8063	0.9017		0.3251	0.5142
5	-2.74849	0.837079	3.1245	2.09046		3.840717
	0.1019	0.9574	0.0466	0.3251		0.0091
6	-6.5892	-3.00364	-0.71622	-1.75026	-3.84072	
	<.0001	0.0604	0.9781	0.5142	0.0091	

وبترتيب المتوسطات ثم الربط بين التي لا يوجد بينها اختلاف معنوي، نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وبإيجاد 95% حدود ثقة للفرق بين المتوسطات نجد:

$$\frac{q_{0.05,6,24}}{\sqrt{2}} = \frac{4.37}{\sqrt{2}} = 3.09006$$

	1	2	3	4	5
2	0.221467 2.98253				
3	1.24347 4.00453	-0.358533 2.40253			
4	0.781467 3.54253	-0.820533 1.94053	-1.84253 0.918533		
5	-0.152533 2.60853	-1.75453 1.00653	-2.77653 -0.0154673	-2.31453 0.446533	
6	1.56347 4.32453	-0.0385327 2.72253	-1.06053 1.70053	-0.598533 2.16253	0.335467 3.09653

وبترتيب المتوسطات ثم الربط بين التي لا يوجد بينها اختلاف معنوي، نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام الحاسب نجد:

```
F     Lower   Center    Upper
2  -2.9826  -1.6020  -0.2214
3  -4.0046  -2.6240  -1.2434
4  -3.5426  -2.1620  -0.7814
5  -2.6086  -1.2280   0.1526
6  -4.3246  -2.9440  -1.5634

F     Lower   Center   Upper
3  -2.4026  -1.0220  0.3586
4  -1.9406  -0.5600  0.8206
5  -1.0066   0.3740  1.7546
6  -2.7226  -1.3420  0.0386
```

```
F    Lower   Center   Upper
4  -0.9186   0.4620  1.8426
5   0.0154   1.3960  2.7766
6  -1.7006  -0.3200  1.0606

F    Lower   Center   Upper
5  -0.4466   0.9340  2.3146
6  -2.1626  -0.7820  0.5986

F    Lower   Center    Upper
6  -3.0966  -1.7160  -0.3354
```

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد :

(I) VAR00002	(J) VAR00002	Sig.	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1.00	**2.00**	.017	.2206	2.9834
	3.00	.000	1.2426	4.0054
	4.00	.001	.7806	3.5434
	5.00	.102	-.1534	2.6094
	6.00	.000	1.5626	4.3254
2.00	**1.00**	.017	-2.9834	-.2206
	3.00	.238	-.3594	2.4034
	4.00	.806	-.8214	1.9414
	5.00	.957	-1.7554	1.0074
	6.00	.060	-.0394	2.7234
3.00	**1.00**	.000	-4.0054	-1.2426
	2.00	.238	-2.4034	.3594
	4.00	.902	-1.8434	.9194
	5.00	.047	-2.7774	-.0146
	6.00	.978	-1.0614	1.7014
4.00	**1.00**	.001	-3.5434	-.7806
	2.00	.806	-1.9414	.8214
	3.00	.902	-.9194	1.8434
	5.00	.325	-2.3154	.4474
	6.00	.514	-.5994	2.1634
5.00	**1.00**	.102	-2.6094	.1534
	2.00	.957	-1.0074	1.7554
	3.00	.047	.0146	2.7774
	4.00	.325	-.4474	2.3154
	6.00	.009	.3346	3.0974
6.00	**1.00**	.000	-4.3254	-1.5626
	2.00	.060	-2.7234	.0394

	3.00	.978	-1.7014	1.0614
	4.00	.514	-2.1634	.5994
	5.00	.009	-3.0974	-.3346

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

i	j	Difference Between Means	Simultaneous 95% Confidence Limits for LSMean(i)-LSMean(j)	
1	2	1.602000	0.220550	2.983450
1	3	2.624000	1.242550	4.005450
1	4	2.162000	0.780550	3.543450
1	5	1.228000	-0.153450	2.609450
1	6	2.944000	1.562550	4.325450
2	3	1.022000	-0.359450	2.403450
2	4	0.560000	-0.821450	1.941450
2	5	-0.374000	-1.755450	1.007450
2	6	1.342000	-0.039450	2.723450
3	4	-0.462000	-1.843450	0.919450
3	5	-1.396000	-2.777450	-0.014550
3	6	0.320000	-1.061450	1.701450
4	5	-0.934000	-2.315450	0.447450
4	6	0.782000	-0.599450	2.163450
5	6	1.716000	0.334550	3.097450

3) طريقة (*SNK*) للمدى المتعدد *Student-Newman-Keuls* (*Multiple Range*)*Test*

أ) يكون اختبار

$$H_0 : \mu_j = \mu_k \quad , \quad H_1 : \mu_j \neq \mu_k$$

بحساب القيمة S_0 على النحوالتالي :

$$S_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}}$$

ويتم رفض فرض العدم إذا كانت :

$$S_0 > \frac{q_{\alpha,s,N-a}}{\sqrt{2}} .$$

حيث $q_{\alpha,s,N-a}$ تمثل قيمة q في جدول توكي (*Studentized Range*) لمتوسطين بينهما s خطوة .

ب) وتكون $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_j و μ_k على النحوالتالي :

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm q_{\alpha,s,N-a}\sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

وبحل مثال 3 السابق نجد:

$q_{0.05,2,24} = 2.92$, $q_{0.05,3,24} = 3.53$, $q_{0.05,4,24} = 3.9$, $q_{0.05,5,24} = 4.17$, $q_{0.05,6,24} = 4.37$

	1	2	3	4	5
2	3.58577*				
3	5.87332*	2.28755			
4	4.83922*	1.25345	-1.03410		
5	2.74864	-0.837127	-3.12468	-2.09058	
6	6.58958*	3.00381	0.71626	1.75036	3.84094*

$\frac{q_{0.05,2,24}}{\sqrt{2}} = 2.06475$, $\frac{q_{0.05,3,24}}{\sqrt{2}} = 2.49609$, $\frac{q_{0.05,4,24}}{\sqrt{2}} = 2.75772$,

$\frac{q_{0.05,5,24}}{\sqrt{2}} = 2.94864$, $\frac{q_{0.05,6,24}}{\sqrt{2}} = 3.09006$

وبتعديل ترتيب المتوسطات والفروق بينها في الجدول السابق نحصل على ما يلي ، مع ملاحظة أنه متى وجد فرق معنوي فنتوقف ، لأن الفروق بعده ستكون كلها معنوية.

	1	5	2	4	3
5	2.74864*				
2	3.58577*	-0.837127			
4	4.83922*	-2.09058	1.25345		
3	5.87332*	-3.12468*	2.28755	-1.03410	
6	6.58958*	3.84094*	3.00381*	1.75036	0.71626

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

```
                          Student-Newman-Keuls Test for Y

NOTE: This test controls the Type I experimentwise error rate under the complete null
hypothesis but
                                  not under partial null hypotheses.


                                  Alpha                        0.05
                                  Error Degrees of Freedom       24
                                  Error Mean Square        0.499057


      Number of Means         2            3             4             5            6
      Critical Range   0.922134    1.1157668     1.2325236     1.3162616    .3814497


                    Means with the same letter are not significantly different.


                               SNK Grouping          Mean      N     X

                                     A             4.0220      5     1

                                     B             2.7940      5     5
                                     B
                                C    B             2.4200      5     2
                                C    B
                                C    B    D        1.8600      5     4
                                C         D
                                C         D        1.3980      5     3
                                          D
                                          D        1.0780      5     6
```

4) اختبار "دنكن" للمدى المتعدد *Duncan Multiple Range Test (Duncan)*

يتم بهذه الطريقة ترتيب المتوسطات تصاعدياً، ثم مقارنة أكبرها قيمة بأصغرها، فإذا لم يوجد فرق معنوي بينهما تتوقف المقارنات، أما إذا وجد فرق فيقارن أكبرها قيمة بثاني أصغر قيمة فيها، فإن وجد فرق تتوقف المقارنات وإلا يقارن أكبرها قيمة مع ثالث أصغر قيمة ، وهكذا دواليك. حتى ننتهي بمقارنة ثاني أصغر قيمة مع أصغر قيمة فيها.

أ) يكون الاختبار هنا بحساب القيمة R_0 كما يلي :

$$R_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}}$$

ويتم رفض فرض العدم إذا كانت :

$$.\,R_0 > \frac{r_{\alpha,p,f}}{\sqrt{2}}$$

حيث $p=2,3,...,a$ ، $r_{\alpha,p,f}$ من جدول "دنكن" . و $N-a=f$

ب) وتكون $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_j و μ_k على النحوالتالي :

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm r_{\alpha,p,f}\sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

وبحل مثال 3 السابق نجد:

$$r_{0.05,2,24} = 2.926 \ , \ r_{0.05,3,24} = 3.076 \ , \ r_{0.05,4,24} = 3.156 \ ,$$
$$r_{0.05,5,24} = 3.230 \ , \ r_{0.05,6,24} = 3.280$$

	1	2	3	4	5
2	3.58577*				
3	5.87332*	2.28755			
4	4.83922*	1.25345	-1.03410		
5	2.74864	-0.837127	-3.12468	-2.09058	
6	6.58958*	3.00381	0.71626	1.75036	3.84094*

$$\frac{r_{0.05,2,24}}{\sqrt{2}} = 2.06899 \ , \ \frac{r_{0.05,3,24}}{\sqrt{2}} = 2.17506 \ , \ \frac{r_{0.05,4,24}}{\sqrt{2}} = 2.23163 \ ,$$
$$\frac{r_{0.05,5,24}}{\sqrt{2}} = 2.28395 \ , \ \frac{r_{0.05,6,24}}{\sqrt{2}} = 2.31931$$

وبتعديل ترتيب المتوسطات والفروق بينها في الجدول السابق نحص على ما يلي ، مع ملاحظة أنه متى وجد فرق معنوي فنتوقف ، لأن الفروق بعده ستكون كلها معنوية.

	1	5	2	4	3
5	2.74864*				
2	3.58577*	-0.837127			
4	4.83922*	-2.09058	1.25345		
3	5.87332*	-3.12468*	2.28755*	-1.03410	
6	6.58958*	3.84094*	3.00381*	1.75036	0.71626

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SPSS" نجد :

1.078	1.398	1.860	2.420	2.794	4.022
6	3	4	2	5	1

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

```
                    Duncan's Multiple Range Test for Y

  NOTE: This test controls the Type I comparisonwise error rate, not the
experimentwise error rate.


                    Alpha                          0.05
                    Error Degrees of Freedom         24
                    Error Mean Square          0.499057
```

```
Number of Means          2          3          4          5          6
Critical Range       0.922      0.969      0.998      1.019      1.035

      Means with the same letter are not significantly different.

          Duncan Grouping          Mean      N    X

                        A        4.0220      5    1

                        B        2.7940      5    5
                        B
                        B        2.4200      5    2
                        B
                   C    B        1.8600      5    4
                   C
                   C             1.3980      5    3
                   C
                   C             1.0780      5    6
```

5) مقارنة المعالجات بمعالجة ضابطة ، اختبار "دنت" *Dunnett Test (Dunnett)*

إذا كان هناك عدد من المعالجات $(r+1)$ ، ويراد مقارنة كل واحدة منها مع معالجة ضابطة ، فإنه يمكن القيام بعدد من المقارنات r باستخدام اختبار "دنت" ، كما يلي :

أ) يكون الاختبار فيها بحساب القيمة d_0 بافتراض أن المعالجة الضابطة μ_k ، كما يلي :

$$d_0 = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}}$$

حيث $j = 1,2,\ldots,r$.

ويتم رفض فرض العدم بحسب نوع الإختبار إذا كانت :

1) $d_0 > d_{\alpha,r,f}$.

حيث $d_{\alpha,r,f}$ توجد من جدول "دنت" للإختبار من طرفين .

2) $d_0 > d_{\alpha,r,f}$.

حيث $d_{\alpha,r,f}$ توجد من جدول "دنت" للإختبار من طرف واحد.

3) $d_0 < -d_{\alpha,r,f}$.

حيث $d_{\alpha,r,f}$ توجد من جدول "دنت" للإختبار من طرف واحد.

ب) وتكون $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للفرق بين المتوسطين μ_j و μ_k على النحوالتالي :

$$\mu_j - \mu_k = \bar{y}_j - \bar{y}_k \pm d_{\alpha,r,f}\sqrt{\frac{2MS_E}{n}}$$

وبحل المثال 3 السابق ، وباعتبار المعالجة الضابطة هي المعالجة السادسة (الأخيرة) ، نجد :

$$d_{\alpha,r,f} = d_{0.05,5,24} = 2.66$$

	1	2	3	4	5
6	6.58958*	3.00381*	0.716258	1.75036	3.84094*

وباستخدام الحاسب :

```
Level     Lower   Center   Upper
1        1.7397  2.9440  4.1483
2        0.1377  1.3420  2.5463
3       -0.8843  0.3200  1.5243
4       -0.4223  0.7820  1.9863
5        0.5117  1.7160  2.9203
```

باستخدام برنامج "SPSS" نجد :

	1	2	3	4	5
6	6.58923*	3.00365*	0.716220	1.75026	3.84073*

95% Confidence Interval	
Upper Bound	Lower Bound
4.1482	1.7398
2.5462	.1378
1.5242	-.8842
1.9862	-.4222
2.9202	.5118

وباستخدام برنامج "SAS" نجد :

```
                              Dunnett's t Tests for Y

NOTE: This test controls the Type I experimentwise error for comparisons of all
treatments against a
                                               control.

                               Alpha                               0.05
                               Error Degrees of Freedom              24
                               Error Mean Square               0.499057
                               Critical Value of Dunnett's t    2.69540
                               Minimum Significant Difference    1.2043


                    Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by ***.


                                     Difference
                          X           Between       Simultaneous 95%
                      Comparison        Means      Confidence Limits

                        1 - 6          2.9440       1.7397   4.1483  ***
                        5 - 6          1.7160       0.5117   2.9203  ***
                        2 - 6          1.3420       0.1377   2.5463  ***
                        4 - 6          0.7820      -0.4223   1.9863
                        3 - 6          0.3200      -0.8843   1.5243
```

تصميم القطاع التام العشوائي Randomized Complete Block Design (RCBD)

عندما يتعذر الحصول على عينة متجانسة، يكون التصميم التام العشوائي (CRD) غير مناسب للإستخدام، ذلك أن الإختلاف بين وحدات العينة سيختلط مع الإختلاف بين المعالجات ولا نستطيع تحديد أحدهما من الآخر. لذلك إذا أمكن وضع وحدات العينة في مجموعات كل واحدة منها تحتوي على وحدات متجانسة بعدد المعالجات بحيث توزع المعالجات عشوائياً على الوحدات داخل كل مجموعة وبشكل مستقل. عندئذ يقال لهذا التصميم "تصميم القطاع التام العشوائي". ويكون نموذجه على النحو التالي:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \;; \qquad i=1,2,\dots,a \qquad j=1,2,\dots,b$$

حيث: μ: المتوسط العام الموجود في كل الوحدات. τ_i: تأثير المعالجة i. β_j: تأثير القطاع (المجموعة) j.

ϵ_{ij}: الخطأ التجريبي وهو $NIID(0,\sigma^2)$، لكل i و j.

وتكون إختبارات هذا النموذج على النحو التالي:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a \;;$ $\qquad H_1: \mu_i \neq \mu_k,\ i \neq k,$ لواحدة على الأقل

$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \;;$ $\qquad H_1: \tau_i \neq 0,$ لواحدة على الأقل أو

مثال :

أجريت دراسة لمعرفة الفروق بين خمسة أنواع من الأدوية التي تعالج مرضاً معيناً، و هي الأنواع A، B، C، D، E. تعذر الحصول على عدد كافٍ من المرضى متجانسين (أي لهم نفس درجة أو شدة المرض). ولكن أمكن الحصول على أربع مجموعات (قطاعات) مختلفة، كل مجموعة تشمل عدداً متجانساً من المرضى. عولجت كل مجموعة بخمسة الأنواع من الأدوية. و حسبت المدة التي استغرقت الدواء لإزالة المرض بالأسابيع فكانت كما يلي:

القطاع	نوع الدواء				
	A	B	C	D	E
1	73	79	83	87	91
2	74	78	85	86	90
3	76	82	86	90	95
4	79	83	87	92	96

هل يوجد اختلاف في كفاءة هذه الأنواع من الأدوية عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$.

الحل :

```
Source  DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS       F      P
T        4   751.30   751.30   187.83  247.68  0.000
B        3    86.40    86.40    28.80   37.98  0.000
Error   12     9.10     9.10     0.76
Total   19   846.80
```

نجد أن قيمة F كبيرة جداً وكذلك قيمة P تساوي تقريباً صفراً، وبالتالي يرفض فرض العدم القائل بعدم وجود اختلاف في كفاءة هذه الأنواع من الأدوية في إزالة المرض، عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$.

الكفاءة النسبية لتصميم القطاع التام العشوائي:

تستخدم الكفاءة النسبية لتصميم القطاع التام مقارنة بالتصميم التام العشوائي لإعطاء تبرير لتفضيل استخدام الأول على الثاني.
إحدى طرق قياس كفاءة تصميم القطاع التام العشوائي إلى التصميم التام العشوائي هي بحساب القيمة R كما يلي:

$$R = \frac{(df_b + 1)(df_r + 3)\sigma_r^2}{(df_b + 3)(df_r + 1)\sigma_b^2}$$

حيث σ_r^2 و σ_b^2 تبايني الخطأ التجريبي ، للتصميم التام العشوائي ولتصميم القطاع التام العشوائي بالترتيب. و df_r و df_b هما درجتي حرية الخطأ المناظر لكل واحد منهما.
يمكن استخدام MS_E (تقدير الخطأ التجريبي) من تصميم القطاع التام العشوائي لتقدير تباين الخطأ التجريبي σ_b^2 . وتستخدم العلاقة التالية للحصول على تقدير تباين الخطأ التجريبي من التصميم التام العشوائي σ_r^2 كما يلي:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{(b-1)MS_B + b(a-1)MS_E}{ab-1}$$

مثال :
أحسب الكفاءة النسبية لتصميم القطاع التام العشوائي للمثال السابق.
الحل:

$$\sigma_b^2 = 0.76$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{(4-1)28.8 + 4(5-1).76}{20-1} = 5.18737$$

$$R = \frac{(12+1)(15+3)5.18737}{(12+3)(15+1)0.76} = 6.65485$$

أي أن كفاءة تصميم القطاع التام العشوائي في هذه التجربة بالنسبة للتصميم التام العشوائي هي 6.65485 أي حوالي 7 ، وهذا يعني أنه إذا استخدم التصميم التام العشوائي فسيؤدي إلى الاحتياج لمضاعفة عدد الوحدات سبع مرات تقريباً من أجل الحصول على نفس الحساسية في اكتشاف الفروق بين المعالجات التي نحصل عليها من تصميم القطاع التام العشوائي.

تقدير البيانات المفقودة:

إذا فقدت بعض البيانات في هذا التصميم فيمكن تقديرها ثم استكمال التحليل بعد إزالة درجة حرية واحدة من درجات حرية الخطأ لكل قيمة مفقودة، أو أستخدام تصميم القطاع غير التام العشوائي.

مثال:
في المثال السابق إذا فقدت المفردة في القطاع 2 والمعالجة C أي أن الجدول كان كما يلي:

القطاع	نوع الدواء				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
1	73	79	83	87	91
2	74	78		86	90
3	76	82	86	90	95
4	79	83	87	92	96

هل يوجد اختلاف في كفاءة هذه الأنواع من الأدوية في إزالة المرض، عند مستوى معنوي للاختبار $\alpha = 0.01$.

الحل :

```
Source   DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F       P
T         4   751.21   749.20   187.30   515.61   0.000
B         3   91.42    91.42    30.47    83.89   0.000
Error    11    4.00     4.00    0.36
Total    18   846.63
```

نجد أن قيمة F كبيرة جداً وكذلك قيمة P تساوي تقريباً صفراً، وبالتالي يرفض فرض العدم القائل بعدم وجود اختلاف في كفاءة هذه الأنواع من الأدوية في إزالة المرض، عند مستوى معنوي $\alpha = 0.01$.

تقدير معالم النموذج :

يمكن تقدير معالم نموذج تصميم القطاع التام العشوائي كما يلي:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad , \quad \hat{\tau}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \quad , \quad \hat{\beta}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

التصميم المربع : The Square Design

ينتج نموذج التصميم المربع (اللاتيني) (Latin) Square Design من تطوير نموذج القطاع التام العشوائي، وذلك باستخدام قطاعين بدلاً من قطاع واحد. ويكون نموذجه على النحو التالي:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \epsilon_{ijk} \; ; \quad i,\ j,\ k = 1,2,\dots,p$$

حيث : μ: المتوسط العام الموجود في كل الوحدات.

α_i : تأثير الصف i. τ_j: تأثير المعالجة j. β_k : تأثير العمود k.

ϵ_{ijk} : الخطأ التجريبي وهو $NIID(0,\sigma^2)$ ، لكل i و j و k .

مثال:
تريد إحدى الشركات اختبار استهلاك إطارات أسطول السيارات التي تستخدمها في نقل البضائع. تستخدم هذه الشركة أربعة أنواع من الإطارات وهي A و B و C و D . وحيث أن استهلاك الإطارات يتوقف على حجم السيارة و خبرة السائق، فقد استخدمت لغرض هذه الدراسة أربعة أحجام مختلفة من السيارات وأربعة سائقين مختلفي الخبرة . حسبت مدة خدمة هذه الإطارات قبل أن تهلك فكانت بالأشهر كما يلي:

السائق A	حجم السيارة B			
	1	2	3	4
1	A 15.5	B 16.3	C 25.5	D 13.1
2	B 26.0	C 25.0	D 30.1	A 19.9
3	C 25.4	D 18.1	A 22.5	B 27.1
4	D 31.0	A 22.5	B 36.5	C 30.1

هل يوجد اختلاف معنوي في استهلاك هذه الأنواع من الإطارات عند $\alpha = 0.05$.

الحل :
يستخدم لتحليل هذه التجربة نموذج التصميم المربع كما يلي:

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	3	317.373	317.373	105.791	22.40	0.001
T	3	113.742	113.743	37.914	8.03	0.016
B	3	145.482	145.482	48.494	10.27	0.009
Error	6	28.340	28.340	4.723		
Total	15	604.937				

يوجد اختلاف في استهلاك الإطارات بأي مستوى معنوي لا يقل عن 0.016 .
يمكن البحث عن مكمن الإختلاف بحساب المتوسطات لأنواع الإطارات A و B و C و D .
ثم إجراء المقارنات بينها:

A	20.100	B	26.475	C	26.500	D	23.075

وباستخدام اختبار Tukey عند $\alpha = 0.05$ نجد:

$\underline{\text{A} \quad \text{D}}$
$\quad\quad\ \underline{\text{D} \quad \text{B} \quad \text{C}}$

أي أن أنواع الإطارات D و B و C لا يوجد اختلاف معنوي بينها عند مستوى $\alpha = 0.05$، وأنواع الإطارات D و A لا يوجد اختلاف معنوي بينها عند مستوى $\alpha = 0.05$، وبالتالي فإن النوعين B و C تفضلان النوعين D و A .

يمكن فحص الاختيار الصحيح لهذا النموذج بفحص رسومات تقدير الخطأ كما في السابق.

تحليل التصميم المربع في وجود قيم مفقودة:
يمكن تقدير وتحليل هذا التصميم عند وجود قيم مفقودة وذلك بعد طرح درجة حرية واحدة لكل قيمة مفقودة من درجات حرية الخطأ، كما في السابق.

مثال:

إذا فقدت في بيانات المثال السابق بيانات السائق رقم 3على السيارة رقم 1 المستخدم لها النوع C وكذلك بيانات السائق رقم 2على السيارة رقم 4 المستخدم لها النوع A . فكانت البيانات كما يلي:

السائق	السيارة			
	1	2	3	4
1	A 15.5	B 16.3	C 25.5	D 13.1
2	B 26.0	C 25.0	D 30.1	A
3	C	D 18.1	A 22.5	B 27.1
4	D 31.0	A 22.5	B 36.5	C 30.1

هل هناك اختلاف في استهلاك هذه الانواع من الإطارات $\alpha = 0.05$.

الحل: نجد جدول تحليل التباين لهذا النموذج كما يلي:

```
Source    DF    Seq SS    Adj SS    Adj MS       F        P
A          3   342.031   311.277   103.759   15.72    0.011
T          3    73.164    81.091    27.030    4.09    0.103
B          3   143.812   143.812    47.937    7.26    0.043
Error      4    26.405    26.405     6.601
Total     13   585.412
```

وهذا يشير إلى عدم وجود اختلاف بين هذه الإطارات بأي مستوى يقل عن $\alpha = 0.103$

التصميم المربع مرتين Graeco-Latin Square Design

يستخدم هذا التصميم عند وجود p^2 من المفردات غير المتجانسة. التي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة قطاعات. يتم توزيع المعالجات على كل قطاع عشوائياً. ويأخذ نموذج هذا التصميم الشكل التالي:

$$y_{ijkl} = \mu + \theta_i + \tau_j + \omega_k + \psi_l + \varepsilon_{ijkl}\ ; \quad i, j, k, l = 1,2,..., p$$

حيث $\omega_k, \tau_j, \theta_i, \mu$ كما في التصميم المربع ،

ψ_l : تأثير الحرف اللاتيني أو اليوناني.

مثال :

أجريت دراسة لمعرفة الفرق بين أربعة تركيبات من الألوان التي تطلى بها الجدران أ ، ب ، ج ، د (المعالجات T). أستخدمت لهذه الدراسة أربعة مخازن كبيرة مصنوعة من أربعة أنواع مختلفة من المواد (R). يتوجه كل جدار في هذه المخازن إلى إحدى الجهات الأربع (D). توجد هذه المخازن متفرقة وتحت ظروف مناخية مختلفة (C). طلي كل جدار في كل مخزن عشوائياً بأحد الألوان الأربعة. ووزعت هذه الألوان عشوائياً على الجهات الأربع بحيث كل لون يظهر مرة واحدة فقط في كل اتجاه. هذا يعني أن كل لون من هذه الألوان الأربعة يظهر مرة واحدة فقط في كل مخزن ، ومرة واحدة فقط في كل اتجاه ، ومرة واحدة فقط في كل مكان من الأماكن الموجودة فيها هذه المخازن. حسبت المدة التي ظلت بها الألوان صامدة قبل أن يطرأ عليها التغيير.

يستخدم لهذه التجربة التصميم المربع . لأنه يوجد عدد $4^2 = 16$ من الجدران غير المتجانسة (المختلفة) التي يمكن تقسيمها على ثلاثة قطاعات . قطاع المواد الأربع المصنوع منها كل واحد

من هذه المخازن الأربعة . ثم قطاع الإتجاه ، شرقاً وغرباً وشَمالاً وجنوباً (هناك أربعة جدران تتجه ناحية الشرق ، ومثلها ناحية الغرب ، ومثلها ناحية الشَمال ، ومثلها ناحية الجنوب . وأخيراً قطاع المكان الذي بني فيه كل واحد من هذه المخازن الأربعة .
فكانت مدة بقاء هذه الألوان بالشهور كما في الجدول التالي:

	مكان المخازن C			
مادة المخازن R	1	2	3	4
1	د جنوب 69	ج شَمال 75	ب غرب 70	أ شرق 53
2	ج شرق 58	د غرب 65	أ شَمال 73	ب جنوب 75
3	ب شَمال 71	أ جنوب 64	د شرق 51	ج غرب 66
4	أ غرب 60	ب شرق 55	ج جنوب 72	د شَمال 70

فيكون جدول تحليل التباين كما يلي:

```
Source DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS       F      P
D        3  769.688  769.688  256.563  1119.55  0.000
T        3   88.687   88.687   29.562   129.00  0.001
R        3   57.687   57.688   19.229    83.91  0.002
C        3   11.188   11.188    3.729    16.27  0.023
Error    3    0.688    0.688    0.229
Total   15  927.938
```

الذي يشير إلى اختلاف واضح بين أنواع الطلاء . وذلك بأي مستوى معنوي يتجاوز 0.001.
وباستخدام اختبار Tukey عند مستوى معنوي $\alpha = 0.05$ ، نجد

أ	د	ب،ج
62.5	63.75	67.75

وهذا يعني أن نوع الطلاء ب و ج متساويان ويفوقان بدرجة ثقة تتجاوز 99.5% النوعين أ و د اللذان لا يوجد بينهما اختلاف بدرجة ثقة تزيد عن 90%.

الفصل الخامس

التصميم العاملي بعاملين Two-Factor Factorial Design

يستخدم هذا التصميم عندما يراد دراسة عاملين كل واحد منهما له عدد من المستويات. ويكون نموذجه على النحو التالي:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}\,; \quad i = 1,...,a;\, j = 1,...,b; k = 1,...,n$$

حيث μ : المتوسط العام الموجود في جميع المشاهدات.

τ_i : تأثير المستوى i من العامل الأول A (الصفوف مثلاً)

β_j : تأثير المستوى j من العامل الآخر B (الأعمدة مثلاً)

$(\tau\beta)_{ij}$: تأثير التداخل (التقاطع) بين العاملين. أو بمعنى آخر تأثير مستوى أحد العاملين عند كل مستوى من مستويات العامل الآخر.

ε_{ijk} : عامل الخطأ العشوائي.وهو $NIID(0,\sigma^2)$ ، لكل i و j و k .

وتعرّف تأثيرات المعالجات سواء للعامل الأول أو الثاني بأنها انحرافات عن المتوسط ، وبالتالي فإن $\sum_i \tau_i = 0$ و $\sum_j \beta_j = 0$ ، وكذلك يعرّف التقاطع بحيث يكون :

$$\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij} = \sum_{i=1}^{a}(\tau\beta)_{ij} = 0$$

يكون عدد الوحدات التجريبية أو الملاحظات أو المشاهدات في تجربة من هذا النوع abn حيث $(n > 1)$ عدد التكرارات عند كل مستوى ab الناتج من العاملين A و B . ويكون هذان العاملان متساويين في الأهمية بحيث نحتاج إلى إجراء الإختبارات التالية :

(i) $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0; \quad H_1 : \tau_i \neq 0$ لواحد على الأقل منها

وهو يختبر وجود اختلاف في تأثير مستويات العامل A .

(ii) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_b = 0; \quad H_1 : \beta_j \neq 0$ لواحد على الأقل منها

وهو يختبر وجود اختلاف في تأثير مستويات العامل B .

(iii) $H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0;$ لكل i و j $; \quad H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ لواحد على الأقل منها

وهو يختبر وجود تداخل بين العاملين A و B .

مثال :

أجريت دراسة لمعرفة أثر درجة الحرارة وأثر المادة المصنوعة منها البطاريات على عمر البطارية. أختيرت ثلاثة أنواع من المواد التي تصنع منها البطاريات (1 و2 و3) . واختيرت ثلاث درجات حرارة (15 و 70 و 125 درجة فهرنهايت) . وكررت التجربة أربع مرات (عند كل مادة ودرجة حرارة). ثم حسب العمر الذي ظلت تعمل فيه كل بطارية بشكل جيد ، فوجد كما يلي:

نوع المادة A	درجة الحرارة B			
	15	70	125	المجموع
1	130, 155, 74, 180	34, 40, 80, 75	20, 70, 82, 58	998
2	150, 188, 159, 126	136, 122, 106, 115	25, 70, 58, 45	1300
3	138, 110, 168, 160	174, 120, 150, 139	96, 104, 82, 60	1501
المجموع	1738	1291	770	3799

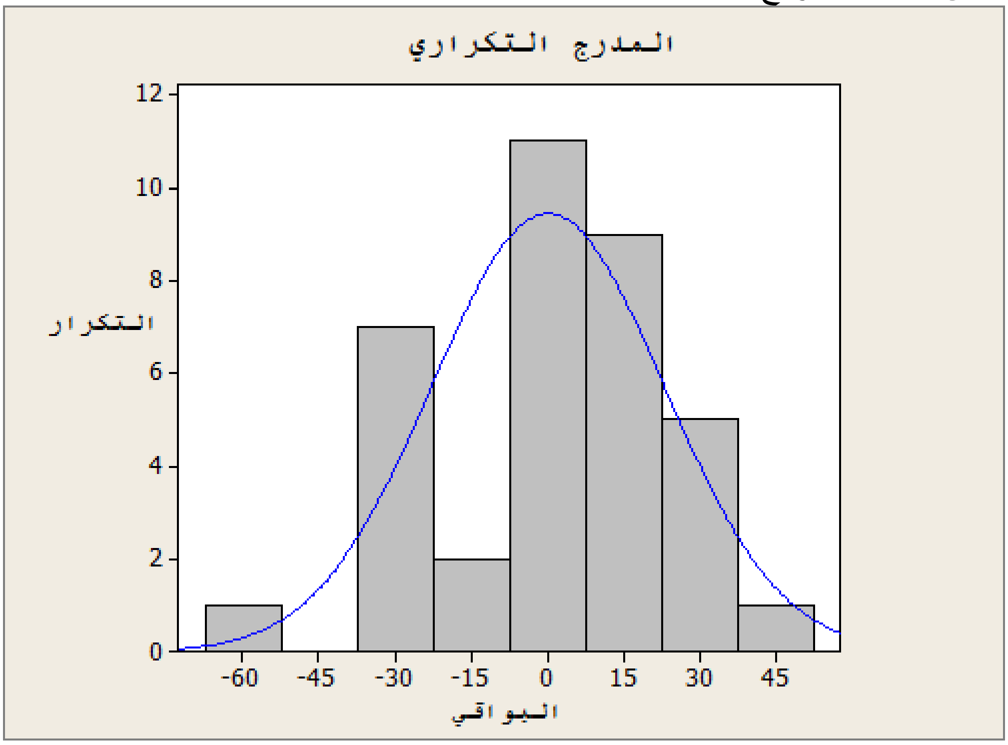
ويكون جدول تحليل التباين كما يلي :

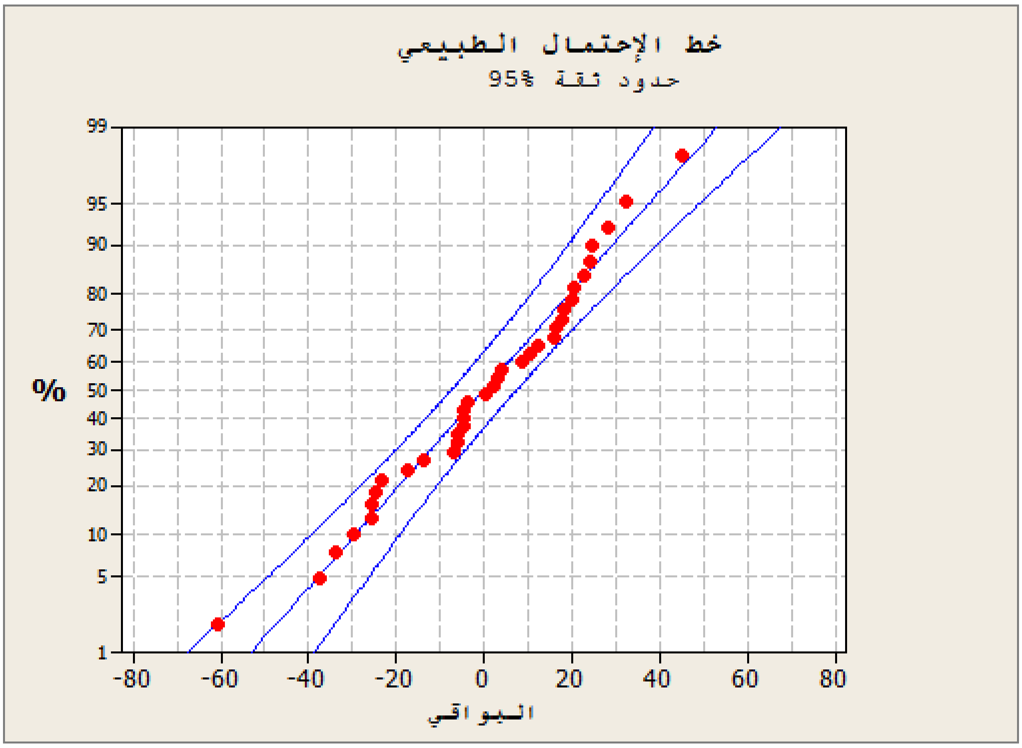
```
Source DF   Seq SS    Adj SS    Adj MS      F       P
A       2  10683.7   10683.7    5341.9   7.91   0.002
B       2  39118.7   39118.7   19559.4  28.97   0.000
A*B     4   9613.8    9613.8    2403.4   3.56   0.019
Error  27  18230.7   18230.7     675.2
Total  35  77647.0
```

وبالتالي يوجد اختلاف بين مستويات العوامل وتداخلاتها بأي مستوى معنوي يتجاوز 1.9 %.

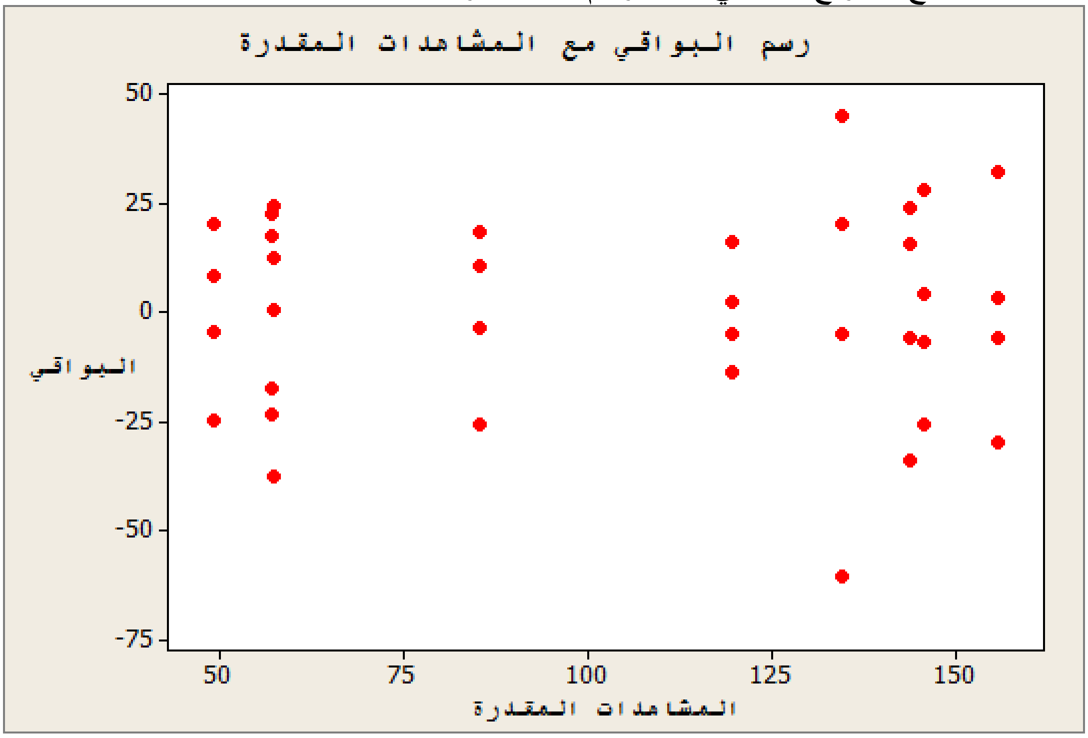
يمكن استخدام المقارنات المتعددة المذكورة سابقاً لتحديد مكامن الإختلاف بين مستويات العوامل وبين تداخلاتها. فمثلاً نجد بالنسبة للعامل A أن النوع 1 هو أسوأها ويختلف عنها عند مستوى لا يقل عن $\alpha = 0.0628$ ،ولا يوجد اختلاف معنوي بين النوعين 2 و 3 . وبالنسبة للعامل B نجد أنها جميعاً مختلفة لصالح درجة الحرارة 15 ثم 70 ثم 125 . وأما بالنسبة للتداخل بين العاملين فمثلاً نجد التداخلات (النوع 2 ودرجة الحرارة 125) و (النوع 1 ودرجة الحرارة 70) و (النوع 1 ودرجة الحرارة 125) تختلف عن (النوع 1 ودرجة الحرارة 15) وتكون أفضل منها بالترتيب.

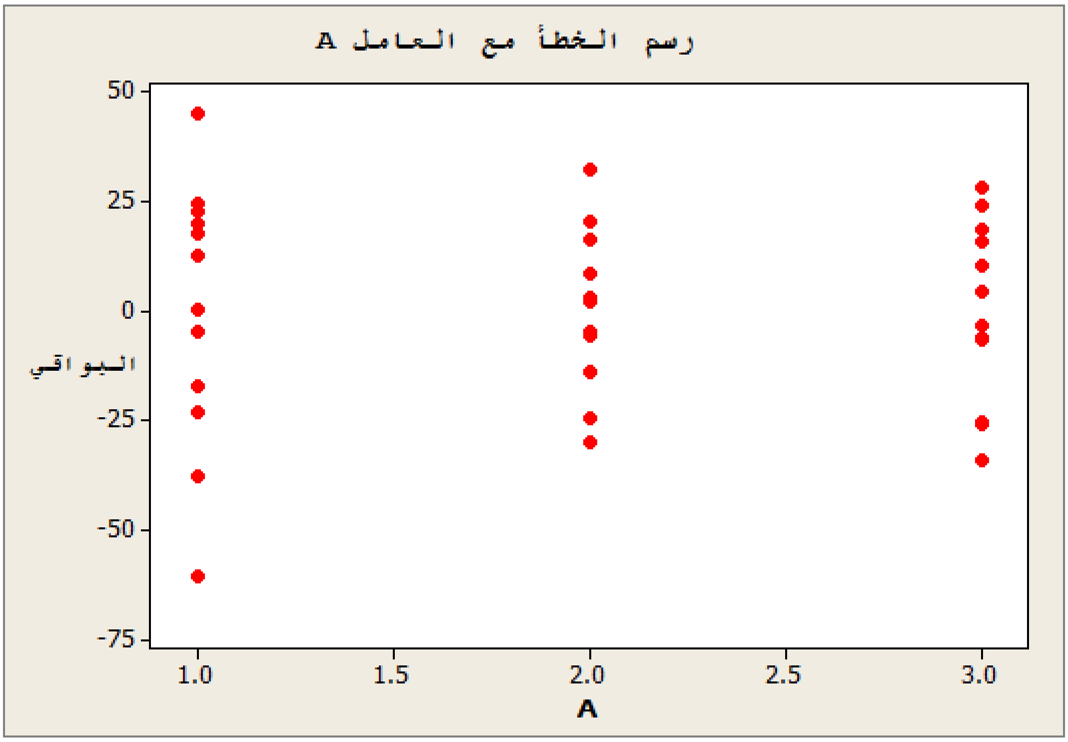
فحص ملائمة النموذج



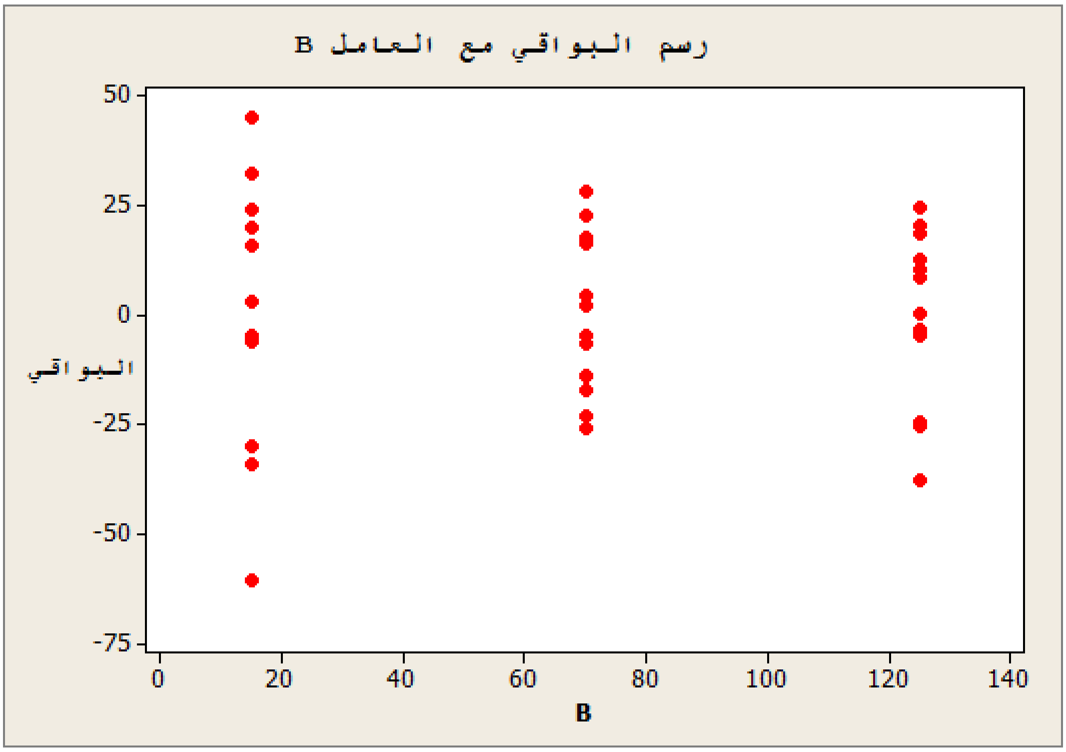


يمكن استخدام تقدير الخطأ e_{ijk} في فحص ملائمة النموذج برسم مدرج تكراري له، أوعن طريق رسمه على خط الإحتمال الطبيعي . وفي هذا المثال نجد أنه لا يوجد ما يمنع من اعتبار فرضية أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي قائمة رغم وجود مفردة واحدة بعيدة عن بقية المجموعة.





كما يمكن رسم تقدير الخطأ e_{ijk} مع تقدير المشاهدات مما يشير إلى أن تباينات الخطأ تميل قليلاً إلى الإرتفاع مع ارتفاع عمر البطارية. كما يمكن رسم تقدير الخطأ e_{ijk} مع كل واحد من العاملين والذي يشير هنا إلى اختلاف طفيف في تباين المشاهدات وبالذات عند نوع المادة 1 ودرجة الحرارة 15.



تقدير معالم النموذج

يمكن الحصول على تقدير معالم هذا النموذج بعد حل المعادلات الطبيعية وتكون كالتالي:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}, \quad \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad \hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, \widehat{(\tau\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$$

وبالتالي يكون تقدير المشاهدات $\hat{y}_{ijk}$ كما يلي :

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\tau}_i + \hat{\beta}_j + \widehat{(\tau\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij.}$$

النموذج بفرض عدم وجود تداخل بين العاملين

يمكن استخدام النموذج بدون تداخل على النحو التالي :

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

وذلك إذا كان هناك إعتقاد قوي بعدم وجود تقاطع بين العاملين ، ويُضم مجموع مربعات ودرجات حرية التقاطع إلى الخطأ التجريبي في جدول تحليل التباين.
يمكن معرفة فيما إذا كان النموذج يحتاج إلى عنصر التقاطع أم لا وذلك برسم الفرق بين المتوسطات المشاهدة لاشتراك العاملين في خلية واحدة وبين تقدير هذه المتوسطات $(\bar{y}_{ij.} - \hat{y}_{ijk})$ مع $\hat{y}_{ijk}$. فإذا كان للرسم شكل محدد دلّ ذلك على الحاجة إلى عنصر التقاطع.

التصميم العاملي العام General Factorial Design

يمكن تعميم التصميم العاملي لعاملين إلى عدة عوامل، فمثلاً العامل A وله a مستوى ، والعامل B وله b مستوى ، والعامل C وله c مستوى وهلمّ جرّا .
فإذا أخذنا نموذجاً بثلاثة عوامل نجد :

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

حيث : $i=1,2,\ldots,a$; $j=1,2,\ldots,b$; $k=1,2,\ldots,c$; $l=1,2,\ldots,n$

مثال :

تريد إحدى شركات تعبئة المياه الغازية الحصول على تعبئة موحدة لجميع القوارير التي تنتجها. حيث وجد اختلاف في التعبئة بين قارورة وأخرى. حدد المهندسون ثلاثة عوامل تؤثر على مقدار التعبئة في القوارير. A نسبة المادة الغازيةِ في التركيبة. B مقدار ضغط الضخ في القارورة . C سرعة خط الإنتاج ، أو مقدار القوارير المعبأة في الدقيقة . أختيرت ثلاثة مستويات من العامل الأول *10* و *12* و *14* % . ومستويان من الثاني *25* و *30* كجم/السنتمتر المربع. ومستويان أيضاً من العامل الثالث *200* و *250* قارورة/الدقيقة . وقُرر تكرار التجربة مرتين. فكانت البيانات التي تمثل متوسط الإنحراف عن التعبئة المطلوبة كما في الجدول التالي:

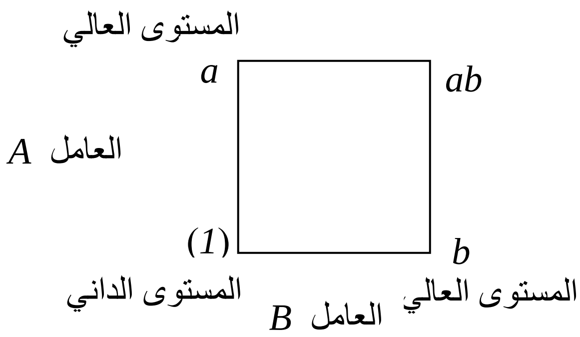
<table>
<tr><td rowspan="4">نسبة الغاز A</td><td colspan="4">الضغط B</td><td rowspan="4">المجموع</td></tr>
<tr><td colspan="2">25</td><td colspan="2">30</td></tr>
<tr><td colspan="2">سرعة الإنتاج C</td><td colspan="2">سرعة الإنتاج C</td></tr>
<tr><td>200</td><td>250</td><td>200</td><td>250</td></tr>
<tr><td>10</td><td>-3,-1</td><td>-1, 0</td><td>-1, 0</td><td>1, 1</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0, 1</td><td>2, 1</td><td>2, 3</td><td>6,5</td><td>20</td></tr>
<tr><td>14</td><td>5, 4</td><td>7,6</td><td>7, 9</td><td>10, 11</td><td>59</td></tr>
<tr><td>المجموع</td><td>6</td><td>15</td><td>20</td><td>34</td><td>75</td></tr>
</table>

ويكون جدول تحليل التباين كما يلي:

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	2	252.750	252.750	126.375	178.41	0.000
B	1	45.375	45.375	45.375	64.06	0.000
C	1	22.042	22.042	22.042	31.12	0.000
A*B	2	5.250	5.250	2.625	3.71	0.056
A*C	2	0.583	0.583	0.292	0.41	0.671
B*C	1	1.042	1.042	1.042	1.47	0.249
A*B*C	2	1.083	1.083	0.542	0.76	0.487
Error	12	8.500	8.500	0.708		
Total	23	336.625				

التصميم العاملي 2^k

هو حالة خاصة من التصميم العاملي ، وذلك عندما يكون لكل عامل مستويان فقط . ونبدأ بأبسط الحالات 2^2 ، وهي لعاملين كل واحد منهما بمستويين . نفرض أنهما A و B . فإذا كان أحد المستويين هو المستوى العالي والآخر هو المستوى الداني ، فإنه يمكن تمثيل هذا التصميم بالشكل التالي :



وهذا يعني أن (1) يكون فيه العاملان في أدنى مستوياتهما . و a يعني أن العامل A في أعلى مستوييه ، والعامل B في أدنى مستوييه . كما أن b تعني أن العامل B في أعلى مستوييه ، و العامل A في أدنى مستوييه . أما ab فيعني أن العاملين كليهما في أعلى مستوييهما.
ويكون تأثير العامل A الصافي ، هومتوسط تأثيري العامل A عند كل مستوى للعامل B . أي :

$$A = \frac{1}{2^{k-1}n}\{[a-(1)]+[ab-b]\} = \frac{1}{2n}\{a+ab-b-(1)\}$$

وبنفس الطريقة يكون تأثير العامل B :

$$B = \frac{1}{2n}\{b+ab-a-(1)\}$$

ويكون تأثير التداخل AB هو متوسط الفرق بين تأثيري العامل A (أو B) عند كل مستوى للعامل B (أو A) . أي :

$$AB = \frac{1}{2n}\{[ab-a]-[b-(1)]\} = \frac{1}{2n}\{ab+(1)-a-b\}$$

$$AB = \frac{1}{2n}\{[ab-b]-[a-(1)]\} = \frac{1}{2n}\{ab+(1)-a-b\}$$

ويكون مجموع مربعات A و B و AB كما يلي :

$$SS_A = \frac{[ab+a-b-(1)]^2}{2^k n} = \frac{[ab+a-b-(1)]^2}{4n}$$

$$SS_B = \frac{[ab+b-a-(1)]^2}{4n}$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab+(1)-a-b]^2}{4n}$$

مثال :

يراد تحليل مركب كيميائي A بمستويين الأول نسبته 15% ، والثاني 25% . وعامل محايد B بمستويين نصف كيلوجرام ، وكيلوجرام واحد . وكررت التجربة ثلاث مرات كما في الجدول التالي :

				التكرار			
A		B			1	2	3	مجموع
0	-	0	-	(1)	28	25	27	80
1	+	0	-	a	36	32	32	100
0	-	1	+	b	18	19	23	60
1	+	1	+	ab	31	30	29	90
مجموع					113	106	111	330

وبالتالي تكون مجاميع المربعات للعوامل الرئيسية وللتداخل كما في جدول تحليل التباين التالي :

```
Source   DF   Seq SS    Adj SS    Adj MS     F      P
A         1  208.333  208.333  208.333  53.19  0.000
B         1   75.000   75.000   75.000  19.15  0.002
A*B       1    8.333    8.333    8.333   2.13  0.183
Error     8   31.333   31         3.917
Tota     11  323.000
```

ويكون التأثير الصافي لهذه العوامل والتداخل كما يلي :

A -8.33333
B 5.00000
AB 1.66667

التصميم العاملي 2^3

وهو من التصميم العاملي 2^k عندما يكون عدد العوامل الداخلة في التجربة $k = 3$ ، وكل واحد منها على مستويين "عالي" و "داني".

فلو فرضنا أن العوامل الثلاثة هي A و B و C . فيمكن تمثيل نموذج هذا التصميم بواحدة من ثلاث طرق ، كما يلي :

	1			2	3		
المعالجات	A	B	C	الرمز	A	B	C
1	-	-	-	(1)	0	0	0
2	+	-	-	a	1	0	0
3	-	+	-	b	0	1	0
4	+	+	-	ab	1	1	0
5	-	-	+	c	0	0	1
6	+	-	+	ac	1	0	1
7	-	+	+	bc	0	1	1
8	+	+	+	abc	1	1	1

ويكون حساب التأثيرات الصافية للعوامل وللتداخل كما في السابق.

مثال :

إذا أخذنا مثال شركة تعبئة المياه الغازية المذكور سابقاً. واكتفينا بالمستويين الأوليين من العامل الأول A . فتصبح البيانات كما في الجدول التالي :

	الضغط B				
	25		30		
	سرعة الإنتاج C		سرعة الإنتاج C		
نسبة الغاز A	200	250	200	250	المجموع
10	-3,-1	-1, 0	-1, 0	1, 1	-4
12	0, 1	2, 1	2, 3	6,5	20
المجموع	6	15	20	34	75

وبالتالي تكون مجاميع المربعات للعوامل الرئيسية وللتداخل كما في جدول تحليل التباين التالي :

```
Source   DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS     F      P
A         1   36.000   36.000   36.000  57.60  0.000
B         1   20.250   20.250   20.250  32.40  0.000
C         1   12.250   12.250   12.250  19.60  0.002
A*B       1    2.250    2.250    2.250   3.60  0.094
A*C       1    0.250    0.250    0.250   0.40  0.545
B*C       1    1.000    1.000    1.000   1.60  0.242
A*B*C     1    1.000    1.000    1.000   1.60  0.242
Error     8    5.000    5.000    0.625
Total    15   78.000
```

ويكون التأثير الصافي لهذه العوامل والتداخل كما يلي :

A -3.00
B -2.25
C -1.75
AB 0.75
AC 0.25
BC 0.50
ABC -0.50

التصميم العاملي 2^k بتكرار واحد

إذا لم تكرر التجربة للتصميم 2^k فإن الخطأ التجريبي لن يتبقى له أية درجات للحرية ، وبالتالي لا يمكن القيام بالتحليل .
توجد طريقتان للخروج من هذا الإشكال ، أولاهما تكون بتجميع التداخلات الأعلى واستخدامها لتقدير الخطأ التجريبي .
والأخرى برسم خط الإحتمال الطبيعي لتأثيرات المعالجات في التصميم. فالتأثيرات التي تكون على خط الإحتمال الطبيعي يكون متوسطها الصفر وتباينها σ^2 وبالتالي تعتبر غير مؤثرة، لذلك تهمل وتضم إلى الخطأ التجريبي. أما التأثيرات التي تبعد عن خط الإحتمال الطبيعي فتعتبر مؤثرة وتستخدم في النموذج.

مثال :
يراد القيام بتجربة لمعرفة العوامل التي تؤثر على معدل الترشح لمنتج معين . استخدمت أربعة عوامل يظن أنها ذات تأثير على هذا المنتج ، وهي A و B و C و D . كل عامل بمستويين . كررت التجربة مرة واحدة فكانت البيانات كما يلي :

(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d
45	71	48	65	68	60	80	65	43

ad	bd	abd	cd	acd	bcd	$abcd$
100	45	104	75	86	70	96

وبالتالي تكون مجاميع المربعات للعوامل الرئيسية وللتداخل كما في جدول تحليل التباين التالي :

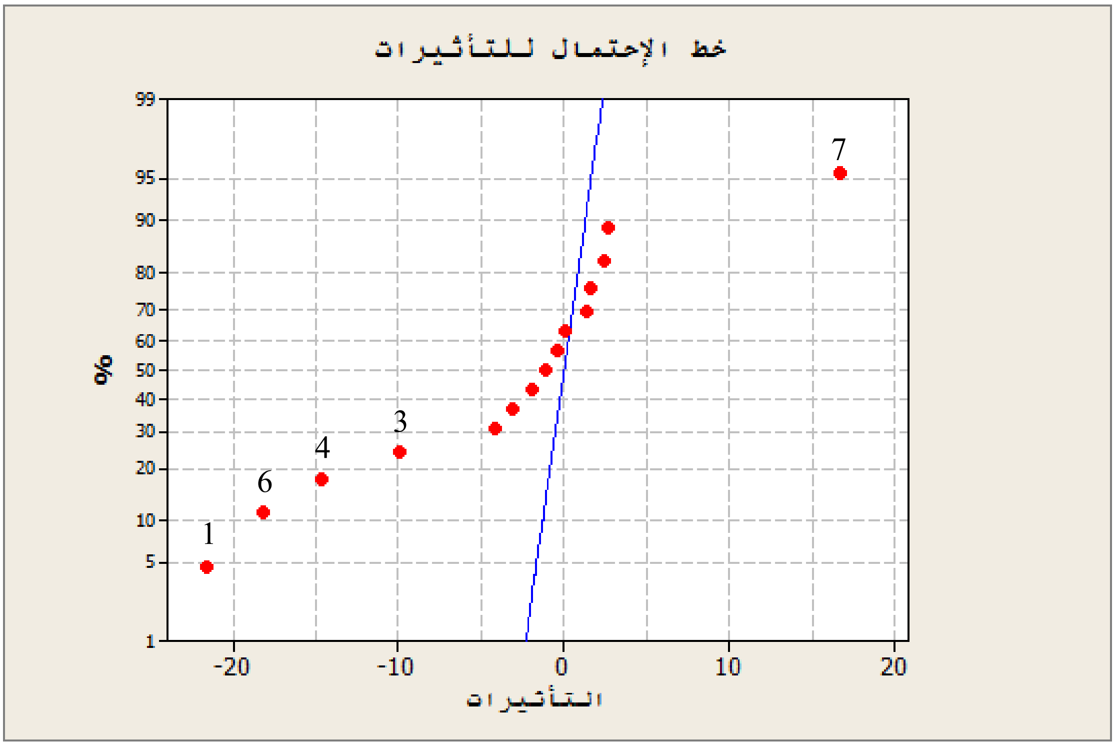
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	1870.56	1870.56	1870.56	*	*
B	1	39.06	39.06	39.06	*	*
C	1	390.06	390.06	390.06	*	*
D	1	855.56	855.56	855.56	*	*
A*B	1	0.06	0.06	0.06	*	*
A*C	1	1314.06	1314.06	1314.06	*	*
A*D	1	1105.56	1105.56	1105.56	*	*
B*C	1	22.56	22.56	22.56	*	*
B*D	1	0.56	0.56	0.56	*	*
C*D	1	5.06	5.06	5.06	*	*
A*B*C	1	14.06	14.06	14.06	*	*
A*B*D	1	68.06	68.06	68.06	*	*
A*C*D	1	10.56	10.56	10.56	*	*
B*C*D	1	27.56	27.56	27.56	*	*
A*B*C*D	1	7.56	7.56	7.56	*	*
Error	0	*	*	*		
Total	15	5730.94				

وكما هو واضح أنه لم تتبق أية درجات حرية للخطأ.

ويكون التأثير الصافي لهذه العوامل وتداخلاتها كما يلي :

A	-21.625
B	-3.125
C	-9.875
D	-14.625
AB	0.125
AC	-18.125
AD	16.625
BC	2.375
BD	-0.375
CD	-1.125
ABC	-1.875
ABD	-4.125
ACD	1.625
BCD	2.625
$ABCD$	1.375

وبرسم خط الإحتمال الطبيعي لهذه التأثيرات نجد :



ونجد القيم التي لا تنتظم في خط مستقيم هي القيم رقم : 7 و 3 و 4 و 6 و 1 . فتكون هذه هي العوامل المؤثرة . وبالتالي بتحليلها نجد جدول تحليل التباين التالي :

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	1870.6	1870.6	1870.6	95.86	0.000
C	1	390.1	390.1	390.1	19.99	0.001
A*C	1	1314.1	1314.1	1314.1	67.34	0.000
D	1	855.6	855.6	855.6	43.85	0.000
A*D	1	1105.6	1105.6	1105.6	56.66	0.000
Error	10	195.1	195.1	19.5		
Total	15	5730.9				

فتكون كل المعالجات هنا معنوية .

التصميم العاملي في قطاعات Factorial Design in Blocks

أحياناً قد يتعذر التكرار على نفس الوحدات في التجربة. ويحتاج الباحث إلى استخدام وحدات أخرى. وقد تكون الوحدات المستخدمة في التكرار غير متجانسة. وبالتالي يكون هناك اختلاف بين التكرارات. عندئذ يستخدم كل تكرار كقطاع مستقل. ويفصل مجموع مربعات ودرجات حرية القطاعات عن الخطأ التجريبي.

مثال :

في تجربة لمعرفة تأثير العامل A و العامل B. كان المطلوب تكرار التجربة ثلاث مرات. كان هناك أربع وحدات تجريبية في ثلاث مجموعة غير متجانسة بحيث يمكن معالجة كل واحدة من وحدات المجموعة عشوائياً بإحدى المعالجات الأربع. لذلك وضعت التكرارات على شكل قطاعات. فكانت البيانات كما يلي:

القطاعات

a	41	*(1)*	25	*ab*	35
(1)	33	*b*	19	*a*	32
ab	36	*a*	32	*b*	23
b	23	*ab*	30	*(1)*	30

ثم بإعادة ترتيب المعالجات (من أجل سهولة إدخال البيانات) نجد :

القطاعات

(1)	33	*(1)*	25	*(1)*	30
a	41	*a*	32	*a*	32
b	23	*b*	19	*b*	23
ab	36	*ab*	30	*ab*	35

ويكون جدول تحليل التباين كما يلي :

```
Source  DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS      F      P
Blks     2   91.167   91.167   45.583  10.19  0.012
A        1  234.083  234.083  234.083  52.34  0.000
B        1   60.750   60.750   60.750  13.58  0.010
A*B      1   30.083   30.083   30.083   6.73  0.041
Error    6   26.833   26.833    4.472
Total   11  442.917
```

ويكون تأثير العوامل :

```
-8.8333    4.5000    3.1667
```

الفصل السادس

الإختلاط Confounding

قد تنشأ مشكلة في عدم وجود عدد كافٍ من الوحدات في كل قطاع يعادل عدد المعالجات 2^k. ولحل هذه المشكلة يتم تقسيم المعالجات إلى مجموعتين (أو أربع أو ثمان، ...). فمثلاً في تجربة 2^2 أمكن الحصول على أربع وحدات تجريبية ولكن كل اثنتين منها فقط متجانستين. لذلك يتحتم توزيع المعالجات في هذه التجربة وهي : *(1)* , *a* , *b* , *ab* إلى قسمين أو قطاعين ثم تُوزع عشوائياً على الوحدتين في كل قطاع . عندئذ يحصل نتيجة لهذا التوزيع إختلاط بين تأثير أحد العوامل الصافية A أو B أو التداخل AB مع تأثير القطاعات ولا يمكن فصل تأثير أحدهما عن الآخر. فبالنظر إلى جدول الإشارات التالي نجد :

	العوامل			
المعالجات	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

فإذا اخترنا توزيع المعالجات إلى قطاعين يكون في الأول (1) ، ab ويكون في الثاني a ، b مثلاً. فنكون حينئذ قد خلطنا تأثير القطاعين مع تأثير التقاطع AB ، لأن تأثير التقاطع AB يقيس الفرق بين متوسطي المعالجتين (1) ، ab من ناحية ومتوسطي المعالجتين a ، b من ناحية أخرى. أما إذا اخترنا توزيع المعالجات إلى قطاعين في الأول (1) ، b وفي الثاني a ، ab مثلاً. فنكون عندئذ قد خلطنا تأثير القطاعين بتأثير العامل A لأنه يقيس الفرق بين متوسطي المستوى الأعلى للعامل A أي a ، ab ومتوسطي المستوى الأدنى للعامل A أي (1) ، b .
وهكذا دواليك. لذلك إذا تم تقسيم المعالجات 2^k إلى قطاعين وحددنا العامل الذي سيختلط بالقطاعين، فإننا نقسم المعالجات لهذا العامل إلى قسمين ، المعالجات الموجبة في قطاع ، والسالبة في آخر. وبالتالي يكون الإختلاط في هذه الحالة بين تأثير ذلك العامل وتأثير القطاع.

التشطير للعوامل في التصميم 2^k Fractioning of the 2^k design

في حالة تعذر الحصول على وحدات تجريبية كافية يتم الاستغناء عن جزء من مجموعة المعالجات والاحتفاظ بجزء. فإذا قسمت المعالجات إلى قسمين واستغني عن قسم واحتفظ بقسم يصبح التصميم 2^{k-1} ، وإذا قسمت المعالجات إلى أربعة أقسام واستغني عن ثلاثة أقسام واحتفظ بقسم يصبح التصميم 2^{k-2} ، وهكذا دواليك.
فمثلاً إذا كان التصميم 2^3، ولكن لم يكن بالإستطاعة استخدام $8 = 2^3$ وحدات تجريبية، وإنما أمكن الحصول على 4 وحدات تجريبية فقط . هذا يعني استخدام شطر التصميم 2^3 . أي أن يحتوي على $4 = 2^{3-1}$ معالجات بعدد الوحدات التجريبية المتوفرة. لذلك يقال لشطر التصميم 2^3 بأنه تصميم 2^{3-1} . ويكون جدول المعالجات والعوامل للتصميم 2^3 كما يلي:

	العوامل							
المعالجات	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

فلو فرضنا أننا اخترنا المعالجات a ,b ,c ,abc لتشكل لنا شطر التصميم 2^3 أي لتكون لنا التصميم 2^{3-1} . ونرى أن هذه المعالجات تظهر في النصف الأعلى من الجدول.
نلاحظ بإعادة ترتيب المعالجات بحيث جمعت الإشارات الموجبة للعامل ABC مع بعضها والسالبة مع بعضها. وبالتالي نقول بأن العامل ABC هو " مولّد " هذا التقسيم . لأن جميع عناصره الموجبة وضعت في قسم واحد . وجميع عناصره السالبة وضعت في قسم آخر.
وحيث أن العامل I (عامل الوحدة) جميع عناصره موجبة فإننا نقول للجزء الموجب المناظر للجزء الموجب في العامل المولّد، وفي مثالنا هذا ABC ، بأنها علاقة " تعريف " وتكتب $I = ABC$. وتستخدم علاقة التعريف هذه في تحديد العوامل المختلطة في القسم الذي تُجرى عليه التجربة. هذه العوامل المختلطة يطلق عليها "مترادفات" أي أن عواملها واحدة.

ففي مثالنا الذي نحن بصدده ، نجد أن علاقة التعريف هي $I = ABC$ ، فإذا أردنا "المرادفات" للعامل A فإننا نضرب طرفي علاقة التعريف هذه في العامل A لنحصل على :

$$A\,I = A\,(ABC)$$
$$A = A^2\,BC$$
$$A = BC$$

أي أن العامل A والعامل BC " مترادفان " أي أن تأثيرهما واحد، بمعنى أننا لانستطيع فصل أحدهما عن الأخر. ويمكن التأكد من ذلك بالنظر إلى عناصرهما الموجبة والسالبة في الجدول السابق في القسم الذي اختناه لإجراء التجربة عليه . فنجد أنها متطابقة في القسم المذكور.
وإذا أردنا "مرادف" العامل AC مثلاً فنضربه ب علاقة التعريف ، $I = ABC$ ، فنجد :

$$AC\,I = AC\,(ABC)$$
$$AC = A^2\,B\,C^2$$
$$AC = B$$

وهلم جرا.