المملكــة العربيــة الســعودية

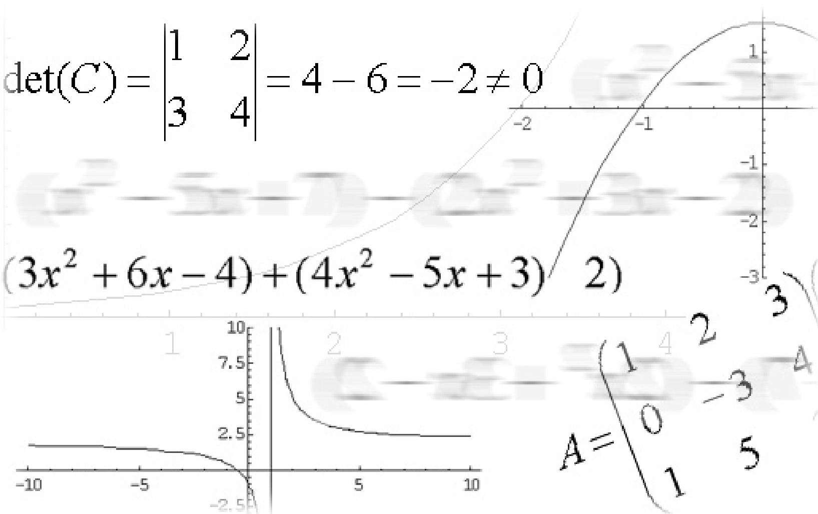
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تقنية مدنية

رياضيات تخصصية

١٧١ريض



قدمه

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية " لمتدربي قسم" تقنية مدنية " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول، ورحمة الله المهداة إليها، لتخرج به من الظلمات إلى النور، وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، أما بعد.

فإن مقرر رياضيات تخصصية ١- يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة قسم التقنية المدنية والمعمارية لتعليم الطالب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها الطالب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للطالب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها الطالب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول الأمثلة بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد الطالب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة لرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن الطالب من:

- الإلمام بمعنى كثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها
- مفهوم المعادلات وكيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ذات مجهول واحد
- الإلمام بمبادئي الهندسة المستوية والفراغية
- معرفة مفهوم الدالة وكيفية رسم بعض الدوال المشهورة
- استيعاب مفهوم التفاضل والقوانين الأساسية لاشتقاق الدوال المشهورة
- التعامل مع نظام المحور وإيجاد الإحداثيات
- إيجاد العلاقة بين الزوايا وكيفية حساب المثلثات
- كيفية حساب المركز المتوسط وعزم القصور للأشكال المختلفة
- حساب الإحتملات والإحتمال الشرطي وحساب المتوسط والوسيط لعينة ما

ولتحقيق هذه الأهداف بإذاً الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى ثمانية وحدات رئيسة:

تعنى الوحدة الأولى لتعريف الطالب بأساسيات الرياضيات في مفهوم كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها كما نتطرق لكيفية تحليل كثيرات الحدود فيتوجب على طالب قسم التقنية المدنية والمعمارية أن يلم بهذه المواضيع. وتهدف هذه الوحدة إلى تحقيق هذا الغرض وقد قسمت إلى فصلين:

في الفصل الأول ندرس كثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها بطرق مختلفة منها طريقة العامل المشترك وطريقة استخدام القانون العام و إكمال المربع.

وفي الفصل الثاني نتطرق إلى معنى وكيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ذات مجهول واحد.

أما الوحدة الثانية فتهدف لدراسة مفهوم الدوال والتعريف بمجال ومدى الدوال وكيفية تحديديهما كما نبين في هذه الوحدة كيفية رسم منحنى بعض الدوال المشهورة.

أما الوحدة الثالثة سنتطرق إلى دراسة مفهوم التفاضل والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود -الدوال المثلثية -الدوال الأسية و اللوغارتمية)

الوحدة الرابعة تهدف إلى تعريف الطالب نظام البيان للمعادلة الخطية وكيفية حساب المسافة بين نقطتين وحساب ميل المستقيم وكتابة معادلة الخط المستقيم.

أما الوحدة الخامسة فنتطرق إلى كيفية حساب الزوايا وتحويل الزاوية من وحدة إلى أخرى كما نتطرق إلى كيفية التعامل مع الدوال المثلثية واستنتاج العلاقة بينهما.

الوحدة السادسة خصصت لمبادئي الهندسة المستوية والفراغية، فنتطرق في هذه الوحدة إلى التعريف والخصائص لبعض الأشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية،المثلث والدائرة)، وقوانين حساب المحيط والمساحة لهذه الأشكال. كما نتطرق لتعريف الأشكال الهندسية الفراغية (متوازي الأضلاع -الإسطوانة -المخروط -الهرم -الكرة)، وقوانين حساب المساحة الجانبية وحجم هذه الأشكال الهندسية.

في الوحدة السادسة نتطرق إلى كيفية حساب مركز الأشكال الأولية والمركبة وكيفية حساب عزم القصور للمساحات والمنحنيات البسيطة والمركبة

وفي الوحدة الثامنة والأخيرة فقد خصصت لحساب الإحتملات والإحتمال الشرطي وكيفية ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية و حساب المتوسط والتباين والانحراف المعياري والوسيط والمنوال لعينة ما

والله الموفق

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

١

الجدارة: الإلمام بفهم كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها.

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها.
- تحليل كثيرات الحدود بطرق مختلفة (العامل المشترك، طريقة المميز و إكمال المربع)
- حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ذات مجهول واحد .
- حل المتراجحات الخطية وتحديد الفترات التي تحقق مجموعة الحلول

الوقت المتوقع للتدريب: خمس ساعات للفصل الأول و خمس ساعات للفصل الثاني، بحيث يكون الوقت الكلي عشر ساعات.

الفصل الأول : كثيرات الحدود

١. تعريف كثيرات الحدود

يكون الحد الجبري إما ثابتاً أو متغيراً أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه، فمثلا معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي 3.

كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهي من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها. الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس) تسمى الحدود المتشابهة، فمثلا $12x^2$ و $-9x^2$ حدان متشابهان ولكن الحدود $-2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة. تتم عملية الاختصار بجمع الحدود المتشابهة فمثلا يختصر $4x^2+3x-2x$ إلى $4x^2+x$. درجة الحد الثابت دائما تساوي الصفر $(2=2x^0)$.

الشكل العام لكثيرات الحدود هو كالتالي:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_2x^2+a_1x+a_0$ حيث $a_n\neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب. المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت.

فمثلاً الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاث كثيرات حدود:

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعاملات	المعامل الرئيسي
$9x^2-x+5$	$9x^2,-x,5$	2	$9,-1,5$	9
$11-2x$	$-2x,11$	1	$-2,11$	-2
x^3+5x-3	$x^3,5x,-3$	3	$1,5,-3$	1

٢. العملية الحسابية على كثيرات الحدود

١,٢. جمع وطرح كثيرات الحدود

مثال ١: اختصر ما يلي:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)\quad 2)(x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)$$

الحل:

$$1)(3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)=(3x^2+4x^2)+(6x-5x)+((-4)+1)=7x^2+x-3$$

$$2)(x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)=(x^2-2x^2)+[(-5x)-(+3x)]+(7-(-2))=-x^2-8x+9$$

٢,٢. ضرب كثيرات الحدود

تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني.

مثال ٢: احسب واختصر ما يلي: $(2x-3)(3x^2-x+1)$

الحل:

$$(2x-3)(3x^2-x+1)=(2x)(3x^2)+(2x)(-x)+(2x)(1)+(-3)(3x^2)+(-3)(-x)+(-3)(1)$$

$$=6x^3-2x^2+2x-9x^2+3x-3=6x^3-11x^2+5x-3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

$$(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال ٣: أوجد حاصل ضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

الحل:

$$1)(7x+10)(7x-10) \qquad 2)(2y^2+11z^2)^2 \qquad 3)(2x-3y)^3$$

$$1)\ (7x+10)(7x-10)=(7x)^2-(10)^2=49x^2-100$$

$$2)\ (2y^2+11z^2)^2=(2y^2)^2+2(2y^2)(11z^2)+(11z^2)^2=4y^4+44y^2z^2+121z^4$$

$$3)\ (2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$$

٣,٢. حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير

مثال ٤: احسب قيمة $2x^3-6x^2+7$ عندما: $1)\ x=-4 \qquad 2)\ x=\sqrt{2}$

الحل:

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بالقيم المعطاة كالتالي:

$$a)\,2x^3-6x^2+7=2(-4)^3-6(-4)^2+7=2(-64)-6(16)+7=-128-96+7=-217$$

$$b)\,2x^3-6x^2+7=2(\sqrt{2})^3-6(\sqrt{2})^2+7=2(2\sqrt{2})-6(2)+7=4\sqrt{2}-12+7=4\sqrt{2}-5$$

٤،٢. قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المطولة المستعملة في تقسيم الأعداد الصحيحة.

فمثلا لتقسيم $x^2+9x-16$ على $x-3$ نتبع الطريقة التالية:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+12 \\
\hline
x-3 & x^2+9x-16 \\
 & x^2-3x \\
\hline
 & 12x-16 \\
 & 12x-36 \\
\hline
 & 20
\end{array}
$$

إذا في هذا المثال يكون خارج قسمة $x^2+9x-16$ على $x-3$ هو $x+12$ وباقي القسمة هو 20

تمرين ١: اذكر الحدود، المعاملات، الدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

1) x^2+2x-7 2) $\sqrt{2}$ 3) $4x^2y^2-5x^3y^2+17xy^3$

4) $2x^4+3x^3+4x^2+5$ 5) x^3-1 6) $-9x^5y+10xy^4-11x^2y^2$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

1) $(3x^2+4x+5)+(2x^2+7x-2)$ 5) $(5x-7)(3x^2-8x-5)$

2) $(4w^2-2w+7)+(5w^3+8w^2-1)$ 6) $(3x^2-2x+5)(2x^2-5x+2)$

3) $(7s^2-4s+11)-(-2s^2+11s-9)$ 7) $(3c-2)(4c+1)(5c-2)$

4) $(u^3-3u^2-4u+8)-(u^2-2u+4)$ 8) $(4u-5)(2u-1)(3u-4)$

تمرين ٣: استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

1) $(3x+5)(3x-5)$ 7) $[(x+5)+y][(x+5)-y]$

2) $(4x^2-3y)(4x^2+3y)$ 8) $[(x-2y)+7][(x-2y)-7]$

3) $(3x^2-y)^2$ 9) $(x-1)^3$

4) $(4w+z)^2$ 10) $(2x+y)^3$

5) $[(x-2)+y]^2$ 11) $[(x-1)+2y]^3$

6) $[(x+3)-y]^2$ 12) $[4-(1-2y)]^3$

تمرين ٤: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند النقاط المعطاة:

$1)\, x^2 + 7x - 1 \,;\, x = 3$

$2)\, -x^2 - 5x + 4 \,;\, x = -5$

$3)\, 5x^3 - x^2 + 5x - 3 \,;\, x = -1$

$4)\, 1 - x^3 - x^5 \,;\, x = 2$

تمرين ٥: استعمل طريقة القسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود الأولى على الثانية:

$1)\, 5x^3 + 6x - 17x + 20,\ x + 3$

$2)\, 6x^4 + 3x^2 - 11x^2 - 3x + 9,\ 2x - 3$

$3)\, 2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45,\ 2x^2 - x - 5$

$4)\, 24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15,\ 6x^2 + 5$

٣. تحليل كثيرات الحدود

عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليل. عملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات. سنتطرق في هذا الباب فقط إلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة.

٣,١. طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م)

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 5: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$1)\, 10x^3 + 6x \qquad 2)\, 12x^2y - 6xy - 30xy^2 \qquad 3)\, (x-4)(2a-b) + (x+4)(2a-b)$

الحل:

١) نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3 + 6x = 2x(5x^2) + 2x(3) = 2x(5x^2 + 3)$$

٢) في هذه الفقرة نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$12x^2y - 6xy - 30xy^2 = 6xy(2x) - 6xy(1) - 6xy(5y) = 6xy(2x - 1 - 5y) = 6xy(2x - 5y - 1)$$

٣) هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثيرة الحدود $2a - b$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)=(2a-b)\left[(x-4)+(x+4)\right]=(2a-b)(x-4+x+4)$$
$$=(2a-b)(2x)=2x(2a-b)$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 6: حلل كثيرة الحدود التالية: $6y^3-21y^2-4y+14$

الحل:

نقوم أولا بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $2y-7$ أصبح عامل مشترك بين المجموعتين فإذا يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$
$$=(2y-7)(3y^2-2)$$

٣,٢. طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c

الحالة الأولى: $a=1$

في هذه الحالة يجب أن نجد كثيرتين حدود يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b. المثال التالي يوضح هذه الطريقة.

مثال 7: حلل كثيرة الحدود التالية: $x^2+7x-18$

الحل:

في هذه الحالة $b=7$ و $c=-18$ إذاً يجب البحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -18 وجمعهما الجبري يساوي 7. فالعددين حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن $7=9+(-2)$, $-18=9\cdot(-2)$.
وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$x^2+7x-18=(x-2)(x+9)$ ويمكن التأكد من هذا الحل بفك الأقواس.

في حالة عدم استطاعة إيجاد العددين حسب الشرطين المذكورين نحاول التحليل بطرق أخرى سنذكرها في هذا الفصل.

الحالة الثانية: $a\neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m,n,p,q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

$1)\ mn=a\ ,\ 2)\ pq=c\ ,\ 3)\ mq+np=b$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع الملاحظة أن إشارة p و q تكون نفس إشارة b إذا كان $c > 0$ ومختلفتان إذا كان $c < 0$. يتم اختيار m و n على أساس الشروط (1 و (2 ثم نستخدم الشرط (3 للتأكد من صحة الأعداد m و n.

مثال 8**:** حلل كثيرة الحدود التالية: $6x^2 + 11x + 3$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m,n,p,q حيث: $mn = 6, pq = 4, mq + np = -11$

مع العلم أن إشارة p و q موجبة لأن $c > 0$ و $b > 0$ وبطريقة التجربة والخطأ نجد في الأخير أن: $m = 2, n = 3, p = 3, q = 1$ إذاً يكون التحليل كما يلي:

$$6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$$

ملاحظة: حتى تكون $ax^2 + bx + c$ قابلة للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة $b^2 - 4ac$ مربعا كاملا. فمثلا $6x^2 - 5x - 4$ قابلة للتحليل لأن $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6)(-4) = 121 = 11^2$.

إذا كان $p = q$ و $m = n$ فنقول أن $ax^2 + bx + c$ هو مربع كامل وتحليله يساوي $(mn + p)^2$

٣,٣. طريقة تحليل فرق مربعين

في هذه الطريقة نستخدم إحد القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذا الباب وهي:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

مثال 9**:** حلل $49x^2 - 144$

الحل:

يمكن كتابة $49x^2 - 144$ على شكل $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون المذكور أعلاه ويصبح التحليل كالتالي: $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2 = (7x + 12)(7x - 12)$

٤,٣. طريقة تحليل فرق وجمع مكعبين

هنا كذلك نستخدم قانونين لم نذكرها من قبل وهما قانون فرق وجمع مكعبين:

$$a)\ x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \qquad b)\ x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

مثال 10**:** حلل كل من: $1)\ 8a^3 + b^3 \quad 2)\ a^3 - 64$

الحل:

١) يمكن كتابة $8a^3 + b^3$ على شكل $8a^3 + b^3 = (2a)^3 - (b)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون (b ويصبح التحليل كما يلي:

$$8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3=(2a+b)[(2a)^2-(2a)(b)+(b)^2]$$
$$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$$

٢) يمكن كتابة a^3-64 على شكل $a^3-64=(a)^3-(4)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون $b)$ ويصبح التحليل كالتالي:

$$a^3-64=(a)^3-(4)^3=(a-4)[(a)^2+(a)(4)+(4)^2]=(a-4)(a^2+4a+16)$$

٥,٣. طريقة التحليل بتجميع الحدود

تستوجب هذه الطريقة شيئاً من الخبرة لمعرفة الحدود التي يجب تجميعها.

مثال 11 **:** حلل كل مما يلي بطريقة التجميع: $1)\ 2m^2+6mn-15m-5n \qquad 2)\ p^2+p-q-q^2$

الحل:

يتم التجميع والتحليل كما يلي:

$$1)\ 2m^2+6mn-15n-5m=(2m^2+6mn)+(-15n-5m)$$
$$=2m(m+3n)-5(3n+m)=(m+3n)(2m-5)$$
$$2)\ p^2+p-q-q^2=p^2-q^2+p-q=(p^2-q^2)+(p-q)$$
$$=(p+q)(p-q)+(p-q)=(p-q)(p+q+1)$$

تمارين

حلل التالي باستخدام الطريق المناسبة:

1) $-15x^2-12x$	13) x^4+11x^2+18	27) $1+y^{12}$
2) $6a^3b^2-12a^2b+72ab^3$	14) $9x^4+10x^2+1$	28) $8-x^6$
3) $(x-4)(m+2n)+n(x-4)$	15) $6x^4+23x^2+15$	29) $(x-2)^3-1$
4) $x(y-3)-5(3-y)$	18) x^2-9	31) $(a+b)^3+(a-b)^3$
5) $3x^3+x^2+6x+2$	19) $81b^2-16c^2$	33) $27-(x+1)^6$
6) $2x^2-2xy+x-y$	20) x^4-9	34) $5xy+20y-15x-60$
7) $10z^3-15z^2-4z+6$	21) $16y^4-196$	35) $4x^2+2x-y-y^2$
8) $6m^3+4m^2-15m-10$	22) $1-121n^2$	36) $x^2+6x+9-y^2$
9) $x^2+9x+20$	23) $x^2-(y+z)^2$	37) $4x^2-9y^2+4x+1$
10) $b^2+12b-28$	24) x^3-8	38) $27x^3-6x^2+2x-1$
11) $8a^2-26a+15$	25) p^3+64	39) $8x^3+12x^2+6x+1$
12) $6x^2-23x+20$	26) $64u^3-27w^3$	40) $a^2+a+b-b^2$

٤. الكسور الجبرية (العبارات النسبية)

كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيرتين حدود. فمثلا تعتبر $\frac{3x+1}{2x-5}$ و $\frac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسور جبرية. مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر لأن القسمة في هذه الحالة تكون غير معرفة، فعلى سبيل المثال مجال $\frac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$, $x=0$ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي صفر. خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}\Leftrightarrow PS=QR \;\;,\;\; \frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}\; R\neq 0 \;\;,\;\; -\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}$$

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}-\frac{R}{Q}=\frac{P-R}{Q} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{PS}{QR}\; R\neq 0$$

١,٤. اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذا عملية الاختصار تتطلب منا الإدراك الجيد بعماليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال 12 **:** اختصر ما يلي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

الحل:

أولا نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقا كالتالي:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \;\;,\;\; x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

إذا يختصر الكسر كالتالي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+2}$, $x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$

ملاحظة $\frac{x+6}{2}\neq x+3$ وإنما $\frac{x+6}{2}=\frac{x}{2}+\frac{6}{2}=\frac{x}{2}+3$

مثال 13 **:** اختصر كل مما يلي: $1)\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$ $\qquad 2)\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}$

الحل:

$$1)\;\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}\;,\; x\neq 1\; x\neq 2$$

$$2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\div\frac{(x+4)(x+3)}{x(x^2-3x+9)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\cdot\frac{x(x^2-3x+9)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)x(x^2-3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)(x+4)(x+3)}=\frac{x}{x+4}\ ,\ x\neq 0\ x\neq -3$$

مثال 14 **:** احسب واختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}\quad 2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}\quad 3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}$$

الحل:

في مثل هذه المسائل بعد تحليل المقام (إذا كان ذلك ممكنا) يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}=\frac{(2mn+m)-(mn+m)}{m+n}=\frac{2mn+m-mn-m}{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

$$2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+3(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2-x+3x+3}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(2x-1)}$$

$$3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x-1}{(x-5)(x+2)}=\frac{x(x-5)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-5x)-(2x^2-4x-x+2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{x^2-5x-2x^2+4x+x-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{-x^2-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}=-\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

هناك حالات يكون فيها بسط ومقام الكسر الجبري عبارة عن كسور جبرية. لاختصار مثل هذا الكسر يجب أولا اختصار البسط والمقام ثم نواصل عملية الاختصار بنفس الطريقة المذكورة سابقا.

مثال 15 **:** اختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}\qquad 2)\frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}$$

الحل:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+1(x-2)}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{3x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{3x-2}{x(x-2)}\cdot\frac{x-5}{3x-2}$$

$$=\frac{(3x-2)(x-5)}{x(x-2)(3x-2)}=\frac{x-5}{x(x-2)}$$

$$2)\ \frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}=\frac{x-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-y}=\frac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{1-xy}{x}}=\frac{xy-1}{y}\cdot\frac{x}{1-xy}=\frac{(xy-1)(x)}{(y)(1-xy)}=$$

$$=\frac{(-1)(1-xy)(x)}{(y)(1-xy)}=\frac{(-1)(x)}{(y)}=-\frac{x}{y}$$

ملاحظة من الخطأ اختصار $\frac{2x^2+y}{3x^2}$ و $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}$ كما يلي:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2+y}{3x^2}=\frac{2+y}{3}$$

تمارين

تمرين ١: اختصر الكسور الجبرية التالية:

$1)\ \frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)}$ $\quad 2)\ \frac{x^2-x-20}{3x-15}$ $\quad 3)\ \frac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x}$ $\quad 4)\ \frac{a^3+8}{a^2-8}$

$5)\ \frac{x^2+3x-40}{-x^2+3x+10}$ $\quad 6)\ \frac{10x^2-3x-1}{2x^2+5x-3}$ $\quad 7)\ \frac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2}$ $\quad 8)\ \frac{x^3-x^2+x}{x^3+1}$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

$1)\ \frac{x^2+x}{2x+3}\cdot\frac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4}$ $\quad 2)\ \frac{x^2-16}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x}$

$3)\ \frac{12m^2+28m+15}{6m^2+35m+25}\cdot\frac{2m^2-m-3}{3m^2+11m-20}$ $\quad 4)\ \frac{6u^2-5u+1}{3u^2+11u-4}\div\frac{2u^2+3u-2}{u^2+3u-4}$

$5)\ \frac{z^2-81}{z^2-16}\div\frac{z^2-z-20}{z^2+5z-36}$ $\quad 6)\ \frac{2a^2-5a+3}{a^2+a-2}\div\frac{3a^2-8a-3}{a^2-a-6}$

تمرين ٣: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{9x+1}{2x-1}-\frac{3x+4}{2x-1} \qquad 2)\frac{x+1}{2x+3}+\frac{2x-1}{2x-3} \qquad 3)\frac{x}{x^2-9}-\frac{3x-1}{x^2+7x+12}$$

$$4)\frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\cdot\frac{3x^2+11x-4}{x-5} \qquad 5)\frac{x+1}{x-3}-\frac{2x}{x-3}\div\frac{x+5}{x-3} \qquad 6)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)$$

تمرين ٤: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x+1}+\frac{4}{4x+1} \qquad 2)\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-16}$$

$$3)\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{5}{x^2+3x-10} \qquad 4)\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2-4}$$

تمرن ٥: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-1}}{\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+3}} \qquad 2)\frac{\frac{x+2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{2x^2-x-1}+\frac{1}{x-1}} \qquad 3)\frac{\frac{z^2+3z-10}{z^2+z-6}}{\frac{z^2-z-30}{2z^2-15z+18}} \qquad 4)\frac{\frac{2y^2+11y+15}{y^2-4y-21}}{\frac{6y^2+11y-10}{3y^2-23y+14}}$$

تمرين ٦: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{(x+h)^{-2}-x^{-2}}{h} \qquad 2)\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \qquad 3)\frac{a^{-1}}{a^{-1}+a^{-2}} \qquad 4)\ \frac{a^{-1}b-ab^{-1}}{a^2+b^2} \qquad 5)\frac{1+\frac{1}{p-2}}{1-\frac{1}{p+3}} \qquad 6)\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

الفصل الثاني : المعادلات

١. تعريف المعادلات

المعادلة هي التساوي بين عبارتين. وعادة ما تكون هاتين العبارتين كثيرتي حدود. وتكون هذه المعادلة إما صحيحة لقيم معينة للمتغير و خاطئة لقيم أخرى. فمثلا المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأي قيمة أخرى ل x. إذاً نقول أن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذا عملية حل معادلة ما هي إلا إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة. فمثلاً $x=2, x=3$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$.

المعادلات المتطابقة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المطابقة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل: $x=$ ثابت.

لإيجاد هذه المعادلات المطابقة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل الإبدالية، التجميعية والتوزيعية. $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متطابقتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة. $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتين متطابقتين.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفر.

  $\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معدلتان متطابقتان

٢. حل المعادلات الخطية

معادلة خطية في متغير واحد x هي معادلة يمكن كتابتها على شكل:

$ax+b=0$ حيث a و b أعداد حقيقية و $a\neq 0$

مثال 1 : حل المعادلات التالية: $1)\ 2x+5=9 \quad 2)\ \frac{3}{4}x-6=0 \quad 3)\ (x+2)(5x+1)=5x(x+1)$

الحل:

١) يتم حل هذه المعادلة بطرح ٥ من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على ٣.

$2x+5-5=9-5\ ,\ 2x=4\ ,\ x=4$

٢) هنا نضيف ٦ ؛إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}x-6=0\ ,\ \frac{3}{4}x-6+6=0+6\ ,\ \frac{3}{4}x=6\ ,\ \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6)\ ,\ x=8$$

٣) نقوم أولاً بفك الأقواس ثم نطرح على التوالٍ $5x^2\,,5x\,,2$ من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على ٦.

$$(x+2)(5x+1)=5x(x+1)\ ,\ 5x^2+11x+2=5x^2+5x\ ,\ 11x+2=5x$$

$$6x+2=0\ ,\ 6x=-2\ ,\ x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\,,\ x=-\frac{1}{3}$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي صفر قبل أن نتخلص من المقام. وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها قي بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال ٢: حل المعادلات التالية: $1)\ \frac{x}{x-3}=\frac{24-5x}{x-3}$ $\qquad 2)\ 1+\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}$

الحل:

١) أولا يجب أن ندرك أن $x\neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفر. ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-3)\frac{x}{x-3}=(x-3)\frac{24-5x}{x-3}\ ,\ x=24-5x\ ,\ x+5x=24-5x+5x$$

$$6x=24\ ,\ \frac{6x}{6}=\frac{24}{6}\ ,\ x=4$$

وهذا يعتبر حل مقبول لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

٢) هنا كذلك يجب أن ندرك أن $x\neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفر. لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-5)\left(1+\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right),\ (x-5)1+(x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

$$x-5+x=5\ ,\ 2x-5=5\ ,\ 2x-5+5=5+5\ ,\ 2x=10\ ,\ x=5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفر فإذا الحل $x=5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول أن المعادلة الأصلية ليس لها حلا.

تمارين

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

1) $2x+10=40$	9) $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7}$	14) $\frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4}$
2) $-3y+20=2$	10) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2}$	15) $\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3}$
3) $4x-11=7x+20$	11) $\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4}$	17) $5[x-(4x-5)]=3-2x$
4) $4(2x-17)+5(3x-8)=0$	12) $2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3}$	18) $6[3y-2(y-1)]-2+7y=0$
5) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$	13) $\frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2}$	19) $4[2+(y+1)^2]=(y+2)^2$
6) $\frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2}$	14) $\frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2$	19) $(y+3)^2=(y+4)^2+1$
7) $5(x+3)(x-3)=5x(x-1)$		21) $(z-7)^2=(z-2)^2+9$
8) $\frac{40-3x}{5x}=\frac{6x+7}{8}$		

٣. حل المعادلات من الدرجة الثانية

معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي $ax^2 + bx + c = 0 \, , \, a \neq 0$.
هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

١,٣. طريقة التحليل

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ باستخدام أعداد صحيحة فإذا يمكن تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ أو $B = 0$

مثال ٣: حل المعادلات التالية: $1) \, x^2 + 10x + 25 = 0 \qquad 2) \, 2x^2 + x - 6 = 0$

الحل:

١) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأينها في هذا الفصل نجد أن $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$
وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5) = 0 \, , \, x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

إذا حلول $x^2 + 8x + 15 = 0$ هي $x = -3$ و $x = -5$. وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

٢) يكون التحليل هنا بطريقة m, n, p, q لأن $a \neq 1$ ويكون الحل كالتالي:

$$2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2) = 0 \, , \, 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \, , \, x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

إذا حلول $2x^2 + x - 6 = 0$ هي $x = -2$ و $x = \frac{3}{2}$

٢,٣. طريقة الجذر التربيعي

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2 = B$ و $B > 0$ إذا $A = \pm B$.

مثال ٤: حل المعادلات التالية: $1) \, x^2 - 5 = 0 \qquad 2) \, (x+1)^2 = 49$

الحل:

١) بعد إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2 - 5 + 5 = 0 + 5 \, , \, x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

إذا الحلول هي: $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$

٢) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$(x+1)^2 = 49 \, , \, x + 1 = \pm\sqrt{49} \, , \, x + 1 = \pm 7 \, , \, x = \pm 7 - 1 \Rightarrow x = 7 - 1 = 6$ أو $x = -7 - 1 = -8$

إذا الحلول هي: $x = 6$ و $x = -8$.

٣,٣. طريقة إكمال المربع

أولا نقوم بفصل الحد الثابت في المعادلة عن المتغير ثم نقسم طرفي المعادلة على a إذا كان $a \neq 1$ ثم نضيف القيمة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة. عند هذه المرحلة يصبح الجانب الأيسر من المعادلة مربعا كاملا ويكون تحليله على شكل $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$. ثم نتبع نفس خطوات الحل بطريقة الجذر التربيعي لبقية الحل.

مثال ٥: حل المعادلات التالية: $2)\, 2x^2 + 8x - 15 = 0$ $\quad 1)\, x^2 - 2x + 6 = 0$

الحل

بعد فصل الثابت عن المتغير مع الملاحظة أن في هذه الحالة $a = 1$ ثم إضافة القيمة $1 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2$ تصبح المعادلة كالتالي:

$$x^2 - 2x - 8 = 0\,,\ x^2 - 2x = 8\,,\ x^2 - 2x + 1 = 8 + 1\,,\ (x-1)^2 = 9$$

عند هذه المرحلة تكون باقي الخطوات مماثلة لطريقة الجذر التربيعي كما يلي:

٢) هنا الفرق عن الفقرة الأولى هو أن $a = 2$ أي أن $a \neq 1$ فإذا يجب القسمة على ٢ بعد مرحلة فصل الحد الثابت. ثم نتبع نفس الخطوات المتبعة في الفقرة الأولى ويكون الحل كالتالي:

$$2x^2 + 8x - 15 = 0\,,\ 2x^2 + 8x = 15\,,\ \frac{1}{2}(2x^2 + 8x) = \frac{1}{2}(15)\,,\ x^2 + 4x = \frac{15}{2}$$

إذا القيمة التي نضيفها إلى طرفي المعادلة هي $4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ويكون باقي الحل كالتالي:

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{15}{2} + 4\,,\ (x+2)^2 = \frac{23}{2}\,,\ x + 2 = \pm\sqrt{\frac{23}{2}}\,,\ x = \pm\sqrt{\frac{23}{2}} - 2\,,\ x = \frac{\pm\sqrt{46} - 4}{2}$$

$$x = \frac{-\sqrt{46} - 4}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{\sqrt{46} - 4}{2}$$

٤,٣. طريقة المميز

من طريقة إكمال المربع نصل إلى قانون مشهور وهو قانون المميز أو طريقة المميز. حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0$ هي $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ولأن القيمة b^2-4ac موجودة تحت الجذر فهناك ثلاثة حالات هي كالتالي:

- إذا كانت القيمة b^2-4ac موجبة هناك حلين حقيقيين مختلفين: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- إذا كانت القيمة b^2-4ac تساوي الصفر هناك حلين حقيقيين متشابهين: $x=\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت القيمة b^2-4ac سالبة ليس هناك حلول حقيقية.

مثال ٦ : حل المعادلات التالية: $1)\,2x^2-5x+2=0\qquad 2)\,x^2+6x+9=0\qquad 3)\,3x^2+6x+7=0$

الحل:

١) في هذه الحالة $a=2\ \ b=-5\ \ c=2$ إذا:

$$b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9>0$$

إذا هناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm3}{4}\ ,\ x=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2\ \text{أو}\ \ x=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

٢) في هذه الحالة $a=1\ \ b=6\ \ c=9$ إذا:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$$

إذا هناك حلان حقيقيان متشابهان وهما: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(6)}{2(1)}=-3$

٣) في هذه الحالة $a=3\ \ b=6\ \ c=7$ إذا: $b^2-4ac=(6)^2-4(3)(7)=36-84=-48<0$

إذا هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل

$1)\ x^2-2x-15=0$ $\quad 2)\ 8y^2+189y-72=0$ $\quad 3)\ 3x^2-7x=0$

$4)\ 8+14t-15t^2=0$ $\quad 5)\ (x-5)^2-9=0$ $\quad 6)\ (2x-5)^2-(4x-11)^2=0$

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي

$1)\ x^2=81$ $\quad 2)\ 2x^2-48=0$ $\quad 3)\ (x-5)^2=36$

$4)\ (x-8)^2=(x+1)^2$ $\quad 5)\ x^2=(x+1)^2$ $\quad 6)\ 4x^2=(2x+3)^2$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع

$1)\ x^2+8x-10=0$ $\quad 2)\ x^2-6x=0$ $\quad 3)\ x^2+7x-2=0$

$4)\ 2x^2+10x-3=0$ $\quad 5)\ 4x^2-4x+15=0$ $\quad 6)\ 2+10x-5x^2=0$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز

$1)\ x^2-2x-15=0$ $\quad 2)\ x^2+x-1=0$ $\quad 3)\ 2x^2+4x+1=0$

$4)\ 3x^2-5x+3=0$ $\quad 5)\ \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$ $\quad 6)\ \frac{2}{3}x^2-5x+\frac{1}{2}=0$

$7)\ -x^2=7x-1$ $\quad 8)\ \sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}=0$ $\quad 9)\ 2x^2+\sqrt{5}x-3=0$

تمرين ٥: أوجد قيمة k حيث أن المعادلات التالية يكون لها حلان متشابهان

$1)\ 16x^2+kx+9=0$ $\quad 2)\ x^2+kx+81=0$ $\quad 3)\ y^2-3y+k=0$ $\quad 4)\ x^2+15x+k=0$

رياضيات تخصصية

مفهوم الدالة ومنحناها

مفهوم الدالة ومنحناها

٢

الجدارة: معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها
- أنواع الدوال وتركيبها
- بعض الدوال الجبرية المشهورة
- الدوال المثلثية الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية
- تمثيل منحنيات الدوال.

الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.
ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

١. تعريف الدالة

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y. أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

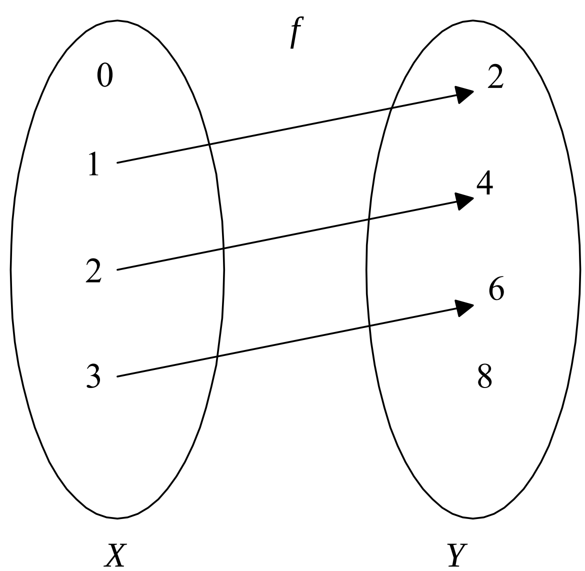
$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث إن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .
نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y
نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

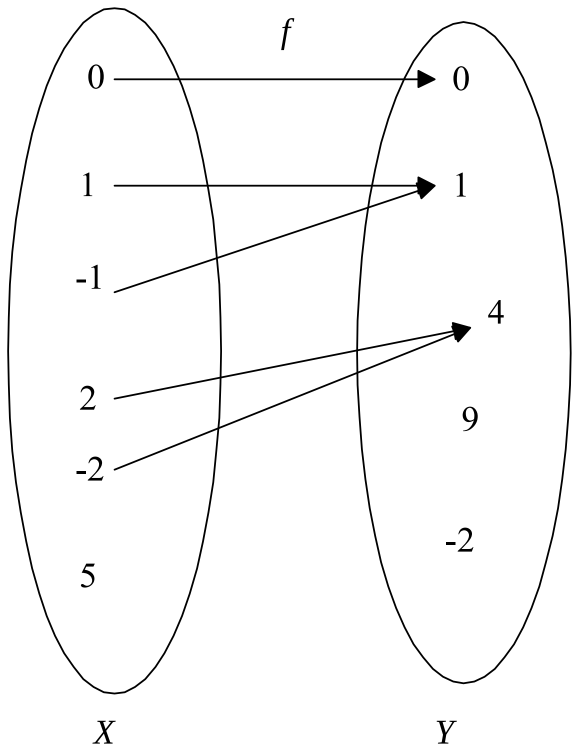
العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .
يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:
$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

مثال٢: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X = \{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y = \{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0) = 0,\ f(1) = f(-1) = 1,\ f(2) = f(-2) = 4$$



العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :

العناصر 0 و 1 و 1− و 2 و 2− في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:

كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f : X \to Y$$

حيث: $f(x) = x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ١:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال٣: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهي مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*.

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلدة الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries*. مثلا:

$$f(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers) = Algeria$$
$$f(Cairo) = Egypt$$
$$f(London) = United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثـــال٤: لـتكن لـدينا المجموعتـان السـابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقـة g مـن $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x.

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهي مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثـال٥: لـتكن لـدينا المجموعتـان السـابقتان $Countries$ و والعلاقـة f مـن $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هي مدينة من البلد x.

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هي مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f.

مثال٦: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

1) $D_f = \{1,2,3\} \qquad R_f = \{2,4,6\}$

2) $D_f = \{0,1,-1,2,-2\} \qquad R_f = \{0,1,4\}$

٣) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$

4) $D_g = Cities \qquad R_g = Countries$

مثال ٧: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x)=2x$.

١) بين بأن f دالة. ٢) حدد مجال f ومداها. ٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن: $x_1=x_2 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذاً: $D_f=\mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f=\{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5)=2\times 5=10$ و $f(14)=2\times 14=28$.

مثال ٨: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x)=2x$.

١) بين بأن g دالة. ٢) حدد مجال g ومداها. ٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأن: $x_1=x_2 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow g(x_1)=g(x_2)$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذاً: $D_g=\mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذاً: $R_g=\mathrm{R}$ لأن: $y=2\times\frac{y}{2}=2\left(\frac{y}{2}\right)=g\left(\frac{y}{2}\right)$

مثلا: $3=g(1.5)$ و $0.6=g(0.3)$.

٣) $g(2.5)=2\times 2.5=5$ و $g(5)=2\times 5=10$.

تعريف ٣: تكون دالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

1) $D_f=D_g$
2) $x\in D_f \Rightarrow f(x)=g(x)$

نرمز لذلك بالرمز: $f=g$.

مثال ٩: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٣ و ٤ على الترتيب متساويتين؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين ٣ و ٤ من المثال ٦ فإن: $f\neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$D_f=Capitals\neq D_g=Cities$

مثال ١٠: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٧ و ٨ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين ٧ و ٨ فإن: $f\neq g$ لأن مجاليهما غير متساويتين:

$D_f=\mathrm{N}\neq D_g=\mathrm{R}$

مثال ١١: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

حيث: $g(x) = x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال ٧. هل $f = g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف ٣) متحقق وهو: $D_f = \mathrm{N} = D_g$

فإن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3 \in D_f = \mathrm{N}$ لكن $f(3) = 2 \times 3 = 6 \neq g(3) = 3^2 = 9$

ومنه فإن: $f \neq g$.

٢. أنواع الدوال

تعريف ٤: نقول عن دالة $f: X \to Y$ أنها تطبيق إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، أي أن مجالها هو مجموعة المنطلق: $D_f = X$.

مثال ١٢: حدد في كل من الأمثلة ١ إلى ٤ و ٧ و ٨ و ١١، هل الدالة المعتبرة تطبيق أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا الدالة $f: \{0,1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$ حيث $f(x) = 2x$.

$D_f = \{1,2,3\} \neq \{0,1,2,3\}$ (أي أن $f(0)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذاً الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٢: لدينا الدالة $f: \{0,1,-1,2,-2,5\} \to \{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x) = x^2$.

$D_f = \{0,1,-1,2,-2\} \neq \{0,1,-1,2,-2,5\}$ (أي أن $f(5)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذاً الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٣: لدينا الدالة $f: Cities \to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x .

$D_f = Capitals \neq Cities$ (أي أن مثلا $f(Abha)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذاً الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٤: لدينا الدالة $g: Cities \to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

$D_g = Cities$ إذاً الدالة تطبيق.

في المثال ٧: لدينا الدالة $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $f(x) = 2x$.

$D_f = \mathrm{N}$ إذاً الدالة تطبيق.

في المثال ٨: لدينا الدالة $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $g(x) = 2x$.

$D_g = \mathrm{R}$ إذاً الدالة تطبيق.

في المثال ١١: لدينا الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

$D_g=\mathrm{N}$ إذاً الدالة تطبيق.

نظرية ١: إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فإن $f:D_f\to Y$ تطبيق.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تطبيق باستبدال مجموعة المنطلق بمجال الدالة (أي أننا نحذف من مجموعة المنطلق العناصر التي ليس لها صورة في مجموعة الوصول).

مثال ١٢: حوّل الدوال التي ليست تطبيقات في المثال ١٢ إلى تطبيقات.

الحل:

في المثال ١: الدالة $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$ هي تطبيق..

في المثال ٢: الدالة $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$ هي تطبيق .

في المثال ٣: الدالة $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x. هي تطبيق..

تعريف ٥: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تباين (أو تطبيق متباين) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل صورة لها أصل واحد، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة فإن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ و $D_f=X$.

مثال ١٣: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تباينات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$ ..

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

هذا التطبيق متباين لأن كل بلد له عاصمة واحدة فقط: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g:Cities\to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $g(Riyadh)=Saudi\ Arabia=g(Abha)$.

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g{:}\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

.هذا التطبيق متباين لأن:

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2\Rightarrow \sqrt{{x_1}^2}=\sqrt{{x_2}^2}\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2 .$$

تجدر الإشارة إلى أننا حذفنا القيمة المطلقة لأن x_1 و x_2 هما عددان طبيعيان إذاً موجبان وقيمتهما المطلقة تساويهما.

تعريف ٦: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تغامر (أو تطبيق غامر) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة الوصول له أصل واحد على الأقل، أي أن: $R_f=Y$ و $D_f=X$.

مثال ١٤: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تغامرات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق ليس غامراً لأن: $R_f=\{2,4,6\}\neq\{2,4,6,8\}$..

مثلا: العنصر ٨ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه زوجيا)..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

هذا التطبيق ليس غامراً لأن: $R_f=\{0,1,4\}\neq\{0,1,4,9,-2\}$..

مثلا: العنصر ٩ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه مربعاً تاماً)

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له عاصمة : $R_f=Countries$..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g:Cities\to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

.هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له مدينة واحدة على الأقل : $R_g=Countries$..

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f=\{2,4,6,8,10,\cdots\}\neq\mathrm{N}$..

مثلا: العنصر ١ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس زوجيا..

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

.هذا التطبيق غامر لأن: $R_f=\mathrm{R}$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g{:}\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

.هذا التطبيق ليس غامراً لأن: $R_f=\{1,4,9,16,25,\cdots\}\neq\mathrm{N}$.

مثلا العنصر ٢ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس مربعاً تاماً..

نظرية ٢: إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فإن $f:D_f\to R_f$ تغامر.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تغامر بحذف العناصر التي ليس لها صورة من مجموعة المنطلق والعناصر التي ليس لها أصل من مجموعة الوصول.

مثال ١٥: حول الدوال التي ليست تغامرات في المثال ١٤ إلى تغامرات.

الحل:

في المثال ١: التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر.

في المثال ٢: التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4\}$ حيث $f(x)=x^2$ هو غامر.

في المثال ٧: التطبيق $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر. .

في المثال ١١: التطبيق $g{:}\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$ هو غامر.

.**تعريف ٧:** نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تقابل (أو تطبيق متقابل) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط ولكل عنصر من مجموعة الوصول أصل واحد فقط، أي أن الدالة تباين وتغامر في آن واحد.

مثال ١٦: باستخدام نتائج الأمثلة ١٣ و ١٤ و ١٥، اذكر التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة..

الحل:

التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة هي:

١) $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$.

٣) $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

٧) $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$.

٨) $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

١١) $g{:}\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$.

والعلة في ذلك أنها كلها تباينات وتغامرات.

مثال ١٧: لتكن لدينا الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث: $f(x)=x^2$. هل هذه الدالة تقابل؟

الحل:

هذه الدالة ليست تقابل لأنها ليست تباين فمثلا: $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$.

خلاصة: تكون علاقة f من X إلى Y :

١) دالة إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٢) تطبيقا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$

٣) تباينا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$
و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٤) تغامرا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$
و $R_f = Y$

٥) تقابلا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$
و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $R_f = Y$

٤. الدوال العددية

تعريف ٩: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ٢٠: كل الدوال المعرفة في المثال ١٨ هي دوال عددية.

١,٤. منحنى الدالة

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x, y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة...

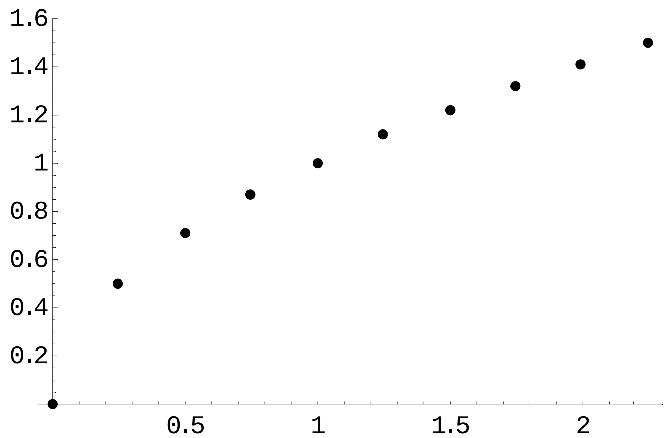
مثال ٢١: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل:

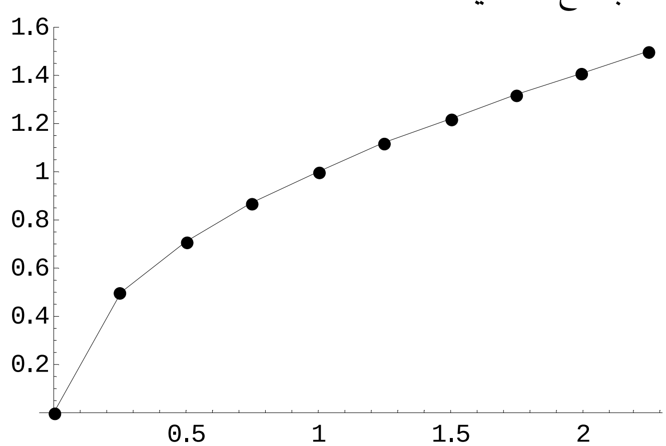
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	1.50	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيما كلما كان التمثيل أدق..

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

تعريف ١٠: نقول عن دالة أنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

مثال ٢٢: هل الدوال المعرفة في المثال ١٨ فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

١) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$

$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x)-g(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

٢) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.

٣) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

٤) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأن مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

٥. الدوال الجبرية

تعريف ١١: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.(المطولة)

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

١,٥. الدالة الثابتة

وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

٣) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ٢٣: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}$.

الحل:

٢,٥. الدالة الخطية

: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x$ و $a\neq 0$ عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

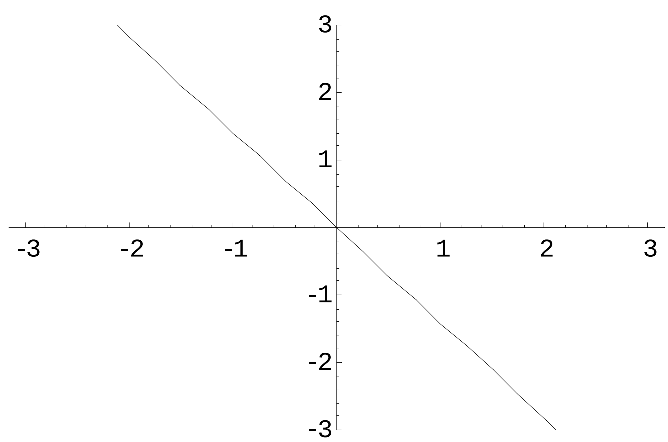
٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) $f(-x)=-f(x)$ أي أنها فردية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ..

مثال ٢٤: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x$.

الحل:



٣,٥. الدالة التآلفية

وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x+b$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عددان حقيقيان ثابتان أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

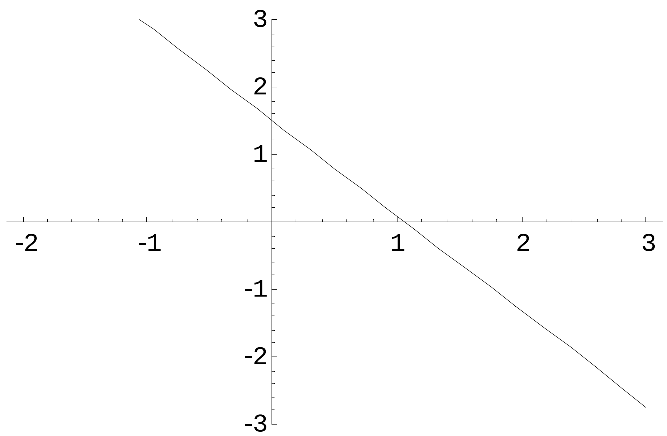
٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل لا يمر من نقطة المبدأ..

مثال ٢٥: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$.

الحل:



٤,٥. الدالة التربيعية

وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثير حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

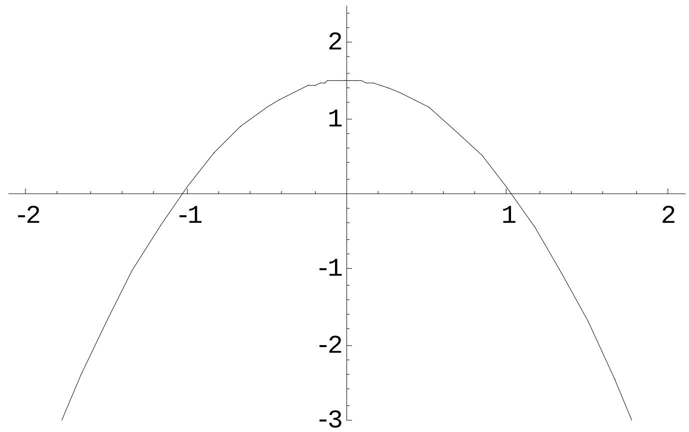
٢) $R_f\neq\mathrm{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$.

مثال ٢٦: مثّل الدالة التالية: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$.

الحل:



٦. الدوال غير الجبرية

أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

و**الدوال المثلثية** هي الدوال التي تكون معرّفة على الزوايا. ونقيس الزوايا بوحدة الراديان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها $^\circ$) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi=180^\circ$

ومن الدوال المثلثية: دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع ودالة قوس الجيب ودالة قوس جيب التمام ودالة قوس الظل..

تعريف ١٢: نقول عن دالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ أنها دورية ذات دور $p>0$ إذا كان: $f(x+p)=f(p)$ من أجل أي عدد حقيقي $x\in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم.

تعريف ١٣: إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحدى زاويتيه غير القائمتين فإن:

$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضاع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

١,٦. دالة الجيب

ويرمز لها بالرمز: $\sin$ وهي من الشكل: $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=\sin x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

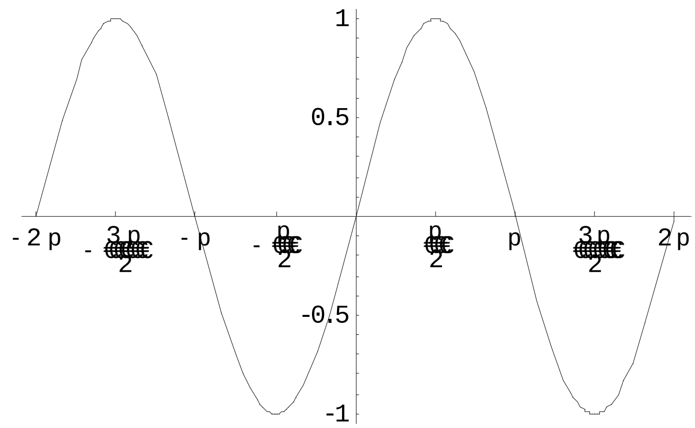
١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1\le\sin x\le 1$ ...

٣) $\sin(-x)=-\sin x$ أي أنها فردية.

٤) $\sin(x+2\pi)=\sin x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ.



٢,٦. دالة جيب التمام

ويرمز لها بالرمز: cos وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

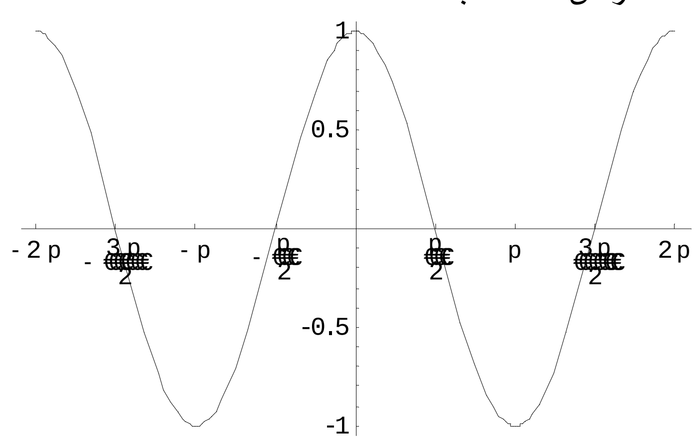
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$ ...

٣) $\cos(-x) = \cos x$ أي أنها زوجية.

٤) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ.



٣,٦. الدوال الأسية

وهي من الشكل: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = f(x) = b^x$ و $b \neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x > 0$ ..

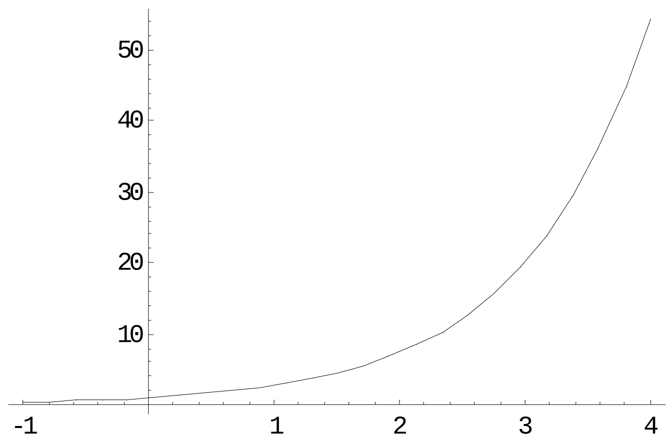
٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثرة الإستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y = e^x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٧ : مثل الدالة التالية: $y = e^x$.

الحل:



٤,٦. الدوال اللوغاريتمية

ويرمز لها بالرمز: $\log_b$ وهي من الشكل: $\log_b : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \log_b x$ إذا كان $x = b^y$ و $b \neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

٠) $\log_b(b^x) = x$ و $b^{\log_b x} = x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

١) $D_f = (0,\infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٢) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثرة الإستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x = \log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

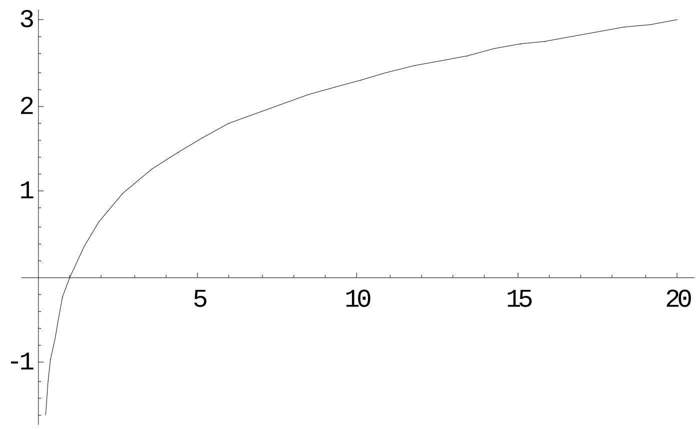
٥) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

٦) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x = e^{x\ln b}$.

٧) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٨: مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



تمارين

تمرين ١: بين بأن كلاً من العلاقات التالية دوال:

$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها

تمرين ٣: حدد نوع كل دالة مما يلي (تطبيق، تباين، تغامر، تقابل):

$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$

$5)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{x^3+1}{x^2} \qquad 6)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+1}$

تمرين 4: هل كلا مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$

$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$

تمرين 5: ما هو وجه الشبه بين الدوال الثابتة والخطية والتآلفية ووجه الفرق بينهم؟

تمرين 6: مثل كلا من الدوال التالية:

$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$

تمرين 7: ما هو وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

المملكـة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

التفاضل

التفاضل

٣

الجدارة: معرفة مفهوم التفاضل وكيفية تفاضل الدوال المشهورة

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- المفهوم الرياضى للتفاضل.
- التفسير الهندسي للمشتقة.
- تفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود -الدوال المثلثية، الأسية واللوغارتمية) والتفاضل الضمني.
- إيجاد القيم الصغرى والعظمى للدالة.

الوقت المتوقع للتدريب: ثلاثة عشر عشر ساعة.

التفاضل

تعريف ١

ليكن I مجالا من $\Re$ ، x_0 نقطة من I ، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$ و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I

وتسمى الدالة

$$f' : I \to \Re$$
$$x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

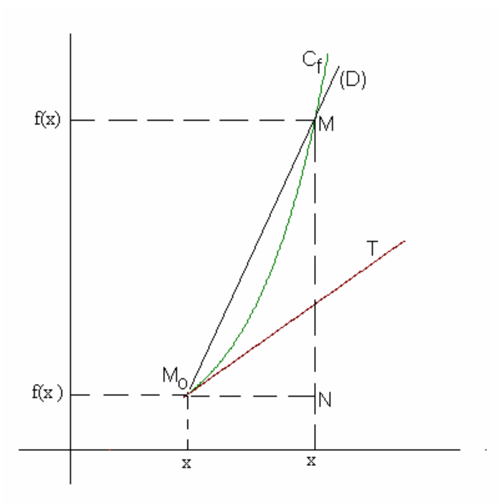
ملاحظة١: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملاحظة٢: $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

١. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحنى C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$



$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{M_0 N}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٢. تعريف المشتقة

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز لها بإحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } \frac{df}{dx} \text{ أو } \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \text{ أو } f'(x) \text{ أو } y'$$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = x^2 + 2$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2 - \left(x^2+2\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right) - \left(x^2+2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = 1 - x^2$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-(x+\Delta x)^2 - (1-x^2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - 1 + x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -2x - \Delta x = -2x$$

مثال ٣: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $w = 1.2 - 0.3m^2$

الحل:

$$w' = \frac{dw}{dm} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{f(m+\Delta m) - f(m)}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\left(1.2 - 0.3(m+\Delta m)^2\right) - \left(1.2 - 0.3m^2\right)}{\Delta m}$$
$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{1.2 - 0.3m^2 - 0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2 - 1.2 + 0.3m^2}{\Delta m}$$
$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{-0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} -0.6m - 0.3\Delta m = -0.6m$$

مثال ٤: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $s = 2 + 3t^2$

الحل:

$$s' = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3(t+\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 6t + 3\Delta t = 6t$$

مثال ٥: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = 2x + 5$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + 5 - (2x+5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + 5 - 2x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

مثال ٦: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = \sqrt{3x-7}$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} + \sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} + \sqrt{3x-7}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - 7 - (3x-7)}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} + \sqrt{3x-7}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x - 7 - 3x + 7}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} + \sqrt{3x-7}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x) - 7} + \sqrt{3x-7}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{\sqrt{3x + 3\Delta x - 7} + \sqrt{3x-7}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x-7} + \sqrt{3x-7}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد ١

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 0$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩: إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y' = \dfrac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتق مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتق جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$.فإن $F'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣: لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن $F'(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2)$

القانون ٦: مشتق قسمة دالتين

لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x)\neq 0$ فإن

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)\,f_2(x)-f_2'(x)\,f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y=\dfrac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x)=8x^7 \Rightarrow f_1'(x)=7\times 8x^{7-1}=56x^6$ و $f_2(x)=2x-1 \Rightarrow f_2'(x)=2$

إذاً

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)\,f_2(x)-f_2'(x)\,f_1(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{56x^6(2x-1)-2\times 8x^7}{(2x-1)^2}=\frac{56x^6(2x-1)-16x^7}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{112x^7-56x^6-16x^7}{(2x-1)^2}=\frac{96x^7-56x^6}{(2x-1)^2}=\frac{2x^6\left(48x-28\right)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتق الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$

إذا كانت $F(x)=(f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

أي أن $F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{dF(x)}{df(x)}\dfrac{df(x)}{dx}=n(f(x))^{n-1}f'(x)$

مثال ١٥: أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

الحل:

لدينا $f(x)=(2x^2+3x-2)\Rightarrow f'(x)=4x+3$

إذاً $y'=F'(x)=2\times 4(2x^2+3x-2)^{2-1}(4x+3)=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$

تمارين

١) احسب باستعمال التعريف مشتقة الدوال التالية:

1) $y = x^2 + 4x - 3$
2) $y = \sqrt{x-5}$
3) $y = 2\sqrt{t+3}$
4) $y = -x^2 + 5x - 7$
5) $y = x^3 - 1$
6) $y = 2x - 7$
7) $y = 5 - +3t + 2t^2$
8) $y = 3t + 7$

2) أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

1) $y = (2x^3 - 7)(3x^2)$
2) $y = \dfrac{2x^2 - 5}{3x}$
3) $y = \dfrac{2}{3x^2 - 7x + 4}$
4) $y = \dfrac{5}{4x^3 - 3x^2}$
5) $y = \dfrac{1}{x+2} - x$
6) $y = \dfrac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$
7) $y = \dfrac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$
8) $y = (2x^4 - 1.9)^3$
9) $y = \dfrac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$
10) $y = (2x^3 - 4x + 7)^{-2}$
11) $y = \left(\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$
12) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$
13) $y = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2 + 1.8}}$
14) $y = x^2\sqrt{x-1}$
15) $y = \dfrac{1.9}{(2x+4)^3}$
16) $y = \dfrac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
17) $y = x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$
18) $y = 2x^{-3} + 7x^{-5}$
19) $y = (4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
20) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+5}}$

٤. قواعد إشتقاق الدوال المثلثية:

١) لتكن الدالة $y=\sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$$

٢) لتكن الدالة $y=\cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٦: لتكن الدالة $y=\sin(2x^3-3)$

فإن $y'=3\times 2x^2\cos(2x^3-3)=6x^2\cos(2x^3-3)$

مثال١٧: أوجد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u=2\theta^3-3\theta^{-2}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=6\theta^2+6\theta^{-3}$

إذاً $y'=-(6\theta^2+6\theta^{-3})\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$

٣) لتكن الدالة $y=\tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٨: إذا كانت $y=\tan x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u=x^{-2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2x^{-3}$

إذاً $y'=\frac{d(\tan u)}{dx}=\frac{du}{dx}\sec^2 u=-2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٤) لتكن الدالة $y=\cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

مثال ١٩: احسب مشتقة الدالة $y=\cot 3x$

الحل:

لدينا $u=3x\Rightarrow\frac{du}{dx}=3$

ومنه فإن $y'=\frac{d(\cot u)}{dx}=-\frac{du}{dx}\csc^2 u=-3\csc^2 3x$

٥) لتكن الدالة $y=\sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\tan u\ \sec u$$

مثال ٢٠: احسب مشتقة الدالة $y=\sec x\theta^2$

الحل:

لدينا $u=\theta^2\Rightarrow\dfrac{du}{d\theta}=2\theta$

ومنه $y'=\dfrac{d(\csc u)}{d\theta}=\dfrac{du}{d\theta}\tan u\ \sec u=2\theta\tan\theta^2\sec\theta^2$

٦) لتكن الدالة $y=\csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx}=-\frac{du}{dx}\cot u\csc u$$

مثال ٢١: احسب مشتقة الدالة $y=\csc x^3$

الحل: لدينا $u=x^3\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=3x^2$

$$y'=\frac{d(\csc u)}{dx}=-\frac{du}{dx}\cot u\ \csc u=-3x^2\cot x^3\csc x^3$$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y=\csc(2x^5-3)$

الحل:

لدينا $u=2x^5-3\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=10x^4$

$$y'=\frac{d(\csc u)}{dx}=-\frac{du}{dx}\cot u\ \csc u=-10x^4\cot(2x^5-3)\csc(2x^5-3)$$

تمارين: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y=\sin^5 3x^2$

2) $y=x\tan\dfrac{1}{x}$

3) $y=\sqrt{x}\cos 2x$

4) $y=\sqrt{\csc x^3}$

5) $y=\csc^3(-7x^4)$

6) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$

7) $y=\tan^2(x^2+1)$

8) $y=(x^4-\cot x)^3$

9) $y=\dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$

10) $y=\sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$

11) $y=\dfrac{1}{x^2\sin^3 x}$

12) $y=(\sin x-\cos x)^2$

13) $y=\sin(\cos 2x)$

14) $y=\sqrt{1+\sin x}$

15) $y=x\cot(-4x)$

16) $y=x\ \csc x$

٥. اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

١,٥. قوانين اشتقاق الدوال الأسية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y=ba^{u}$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$\frac{dy}{dt}=ba^{u}\ln a\,u'$$

مثال ٢٢: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y=8\ 2^{\left(3x^2+4x+5\right)}$

$$y'=8\ 2^{3x^2+4x+5}\ln 2\left(6x+4\right)=\left(48x+32\right)\ln 2\ 2^{3x^2+4x+5}$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس يساوي $e\cong 2{,}718$

إذا كانت لدينا الدالة $y=b\,e^{u}$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y'=\frac{dy}{dt}=b\,e^{u}\,u'$$

مثال ٢٣: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y=8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y'=8\times 2\,e^{2x+1}=16e^{2x+1}$

مثال ٢٤: إذا كانت $y=-5\ e^{\sin x}$

فإن $y'=-5\ \cos x\,e^{\sin x}$

٢,٥. قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y=b\log_{a}u$ حيث $a>0,a\neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=b\frac{u'}{u}\log_{a}e$$

مثال٢٥: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y=3\log\left(6x^{5}\right)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y'=\frac{3\left(30x^{4}\right)\log e}{6x^{5}}=\frac{15x^{4}}{x^{5}}\log e=\frac{15}{x}\log e.$

القانون ٢: إذا كانت لدينا الدالة $y=\ln u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=b\frac{u'}{u}$$

مثال ٢٦: اشتق الدالة التالية: $y=e^{-x}\ln x^{2}$

الحل:

$$y' = -e^{-x}\ln x^2 + \frac{2x}{x^2}e^{-x} = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2\right)e^{-x}$$

تمارين : احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \log_3\left(3x^2 - 5\right)$

2) $y = \ln(x+3)^2$

3) $y = \ln^2(x+3)$

4) $y = \ln\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)$

5) $y = \ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2}$

6) $f(x) = \ln\ \sin 3x$

7) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

8) $y = e^{-\frac{1}{2}x}$

9) $y = e^{x^2}$

10) $y = 5^{3x^2}$

11) $y = x^2 3^x$

13) $y = e^{-x}\ln x$

14) $y = e^{-2x}\sin 3x$

15) $f(x) = \ln\tan e^{x^2}$

16) $f(x) = \ln\sqrt{1-2x}$

٦. النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة $f(x)$

تعريف

نقول أن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى نسبية في النقطة x_0 إذا كان هناك مجال مفتوح U مركزه x_0 بحث يكون :

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in U$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى نسبية في النقطة t_0 إذا كان هناك مجال مفتوح I مركزه t_0 بحث يكون :

$$f(x) > f(t_0) \quad \forall x \in I$$

نظرية

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للإشتقاق في النقطة x_0 وتبلغ في هذه النقطة نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية فإن $f'(x_0) = 0$

٦.١. النقاط الحرجة

النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي النقاط التي تنعدم عندها المشتقة الأولى للدالة $f(x)$.

ومنه فلحساب النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x ومنه نحسب القيمة المرفقة للدالة لكل قيمة للمتغير x .

مثال ٢٧: أوجد النقاط الحرجة للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x ، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x

$$y' = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -1$$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لـ x

لما $x = 2$ فإن $y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -\frac{4}{3}$

لما $x = -1$ فإن $y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$

ومنه فإن النقاط الحرجة هي : $(2, -\frac{4}{3}), (-1, \frac{19}{6})$

٧. اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى في النقطة x_0 فإن مشتقة $f(x)$ موجبة عندما تكون $x < x_0$ وقريبة منها قربا كافيا ، أي أن ميل المماس موجب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يسارها. و مشتقة $f(x)$ سالبة عندما تكون $x > x_0$ وقريبة منها قربا كافيا ، أي أن ميل المماس سالب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يمينها.

أما إذا كان الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى في النقطة x_0 فإن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x < x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا ، و $f'(x) > 0$ من أجل كل $x > x_0$ وقريبة من x_0 قربا كافيا.

مثال ٢٨: أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$

الحل :

الدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$ معرفة ومستمرة على المجال $[-4,+4]$ وهي تبلغ قيمة عظمى نسبية تساوي 4 في النقطة $x = 0$ لأن:

$f(x) < 4$ من أجل كل $0 < x \le 4$ و $-4 \le x < 0$

مثال ٢٩: أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

الحل:

إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق في كل نقطة من $\Re$ ومشقتها تعطى بما يلي:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

وأن المشتقة تنعدم في النقاط $x = -1$ و$x = 1$ وإشارته تحدد من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. ونلاحظ من الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		+		+		-	
$1 + x$		-		+		+	
$1 - x^2$		-		+		-	

أن $f'(x) < 0$ من أجل كل $x < -1$ و $f'(x) > 0$ من أجل كل $-1 < x < 1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من السالبة إلى الموجبة حول النقطة التي يكون فيها $x = -1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى محلية وهي $(-1,-\frac{1}{2})$

وأيضا $f'(x)>0$ من أجل كل $-1<x<1$ و $f'(x)<0$ من أجل كل $x>1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من الموجبة إلى السالبة حول النقطة التي يكون فيها $x=1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى محلية وهي $(1,\frac{1}{2})$.

٨. اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة سالبة فإن هذه النقطة هي نهاية عظمي محلية

وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة موجبة فإن هذه النقطة هي نهاية صغرى محلية

مثال ٣٠ : أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

الحل:

المشتقة الأولى والثانية

$$y'=x^2-x-2,$$
$$y''=2x-1$$

من المثال ١ فإن النقاط الحرجة هي $(2,-\frac{4}{3}),(-1,\frac{19}{6})$

بالنسبة للنقطة الحرجة $(2,-\frac{4}{3})$

$$y''\Big|_{x=2}=2(2)-1=3>0$$

ومنه $(2,-\frac{4}{3})$ هي نهاية صغرى محلية

بالنسبة للنقطة الحرجة $(-1,\frac{19}{6})$

$$y''\Big|_{x=-1}=2(-1)-1=-3<0$$

ومنه $(-1,\frac{19}{6})$ هي نهاية عظمى محلية

٩. نقطة الانعطاف

إذا كانت المشتقة الثانية معدومة وتغير إشارتها حول نقطة فإن هذه النقطة هي نقطة انعطاف.

مثال ٣٠: بالنسبة للدالة $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$

$$y''=2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن $y'' < 0$ وإذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن $y'' > 0$

ومنه فعندما يكون $x = \frac{1}{2}$ يكون لدينا نقطة انعطاف

لحساب الإحداثية الثانية نعوض بقيمة $x = \frac{1}{2}$ في عبارة الدالة

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(\frac{1}{2}) + 2 = \frac{11}{12}$$

إذاً النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{12}\right)$ هي نقطة انعطاف.

تمارين :

أوجد النقاط العظمى والصغرى ونقاط الانعطاف إن وجدت للدوال التالية:

1) $y = x^3$ 2) $y = -x^3$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = 1 - x^2$

5) $y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ 6) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 7) $y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4}$ 8) $y = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

المملكــة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

الهندسة التحليلية

الهندسة التحليلية

٤

الجدارة: الالمام بالمبادئ الهندسيةاالتحليلية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

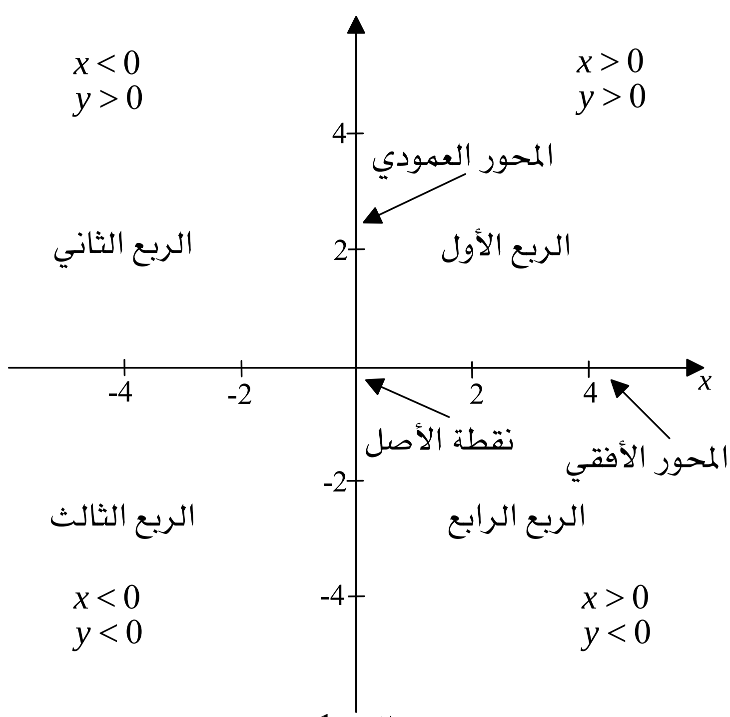
- نظام البيان للمعادلة الخطية
- حساب المسافة بين نقطتين
- حساب ميل ومعادلة الخط المستقيم
- كيفية حساب إحداثيات نقط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

الوقت المتوقع للتدريب: أربع ساعات

مبادئ الهندسة التحليلية

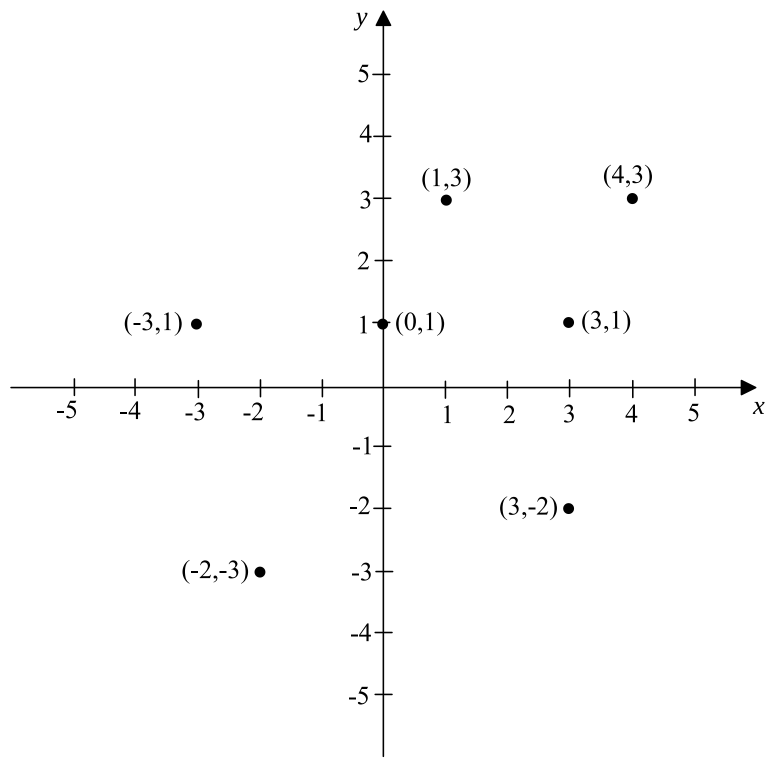
١. نظام المحاور الديكارتي

لقد سبق وعرفنا أن كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة وحيدة على خط الأعداد. فكذلك يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل نقاط على مستوى. فعلى مستوى ذو بعدان أو محوران xy كل نقطة محددة بزوج مرتب من الأعداد يطلق عليه اسم إحداثيات النقطة. يرمز لهذا الزوج المرتب ب (a,b) حيث a عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور x و b كذلك عدد حقيقي يمثل إحداثية النقطة بالنسبة للمحور y. إحداثيات النقطة تكون معروفة بعد تحديد موقع النقطة بالنسبة للمحور الأفقي x وبالنسبة للمحور العمودي y. تتقاطع المحاور عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل. في الرسم1 تم تحديد اتجاه المحاور بحيث تظهر الأعداد الموجبة على يمين نقطة الأصل بالنسبة للمحور x وفوق نقطة الأصل بالنسبة للمحور y. الأربع مناطق التي شكلتها هذه المحاور تسمى الأرباع وهي مرقمة عكس اتجاه عقارب الساعة. يسمى هذا النظام ذو البعدين نظام المحاور الديكارتي.



الرسم1

تحديد نقطة معينة $P(a,b)$ يعني رسم النقطة في موقعها من المستوى. في الرسم ٢ تم رسم النقاط $(3,1)$, $(1,3)$, $(0,1)$, $(3,-2)$, $(-2,-3)$, $(-3,1)$, $(4,3)$. ترتيب الأرقام داخل القوس مهم لأن مثلا الزوجان $(3,1)$, $(1,3)$ تحددان نقطتين مختلفتين على المستوى.



الرسم 2

٢. المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين على خط أفقي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات x النقطتين. المسافة بين نقطتين على خط عمودي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات y النقطتين. فمثلا كما تبين الرسم 3 فالمسافة d بين النقطة $(1,2)$ والنقطة $(1,-3)$ هي: $d =| 2-(-3)|= 5$. أما إذا لم تقع النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ على خط أفقي أو عمودي كما هو موضح في الرسم 4 فالمسافة تكون طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي طول أضلاعه (x_2-x_1) و (y_1,y_2):

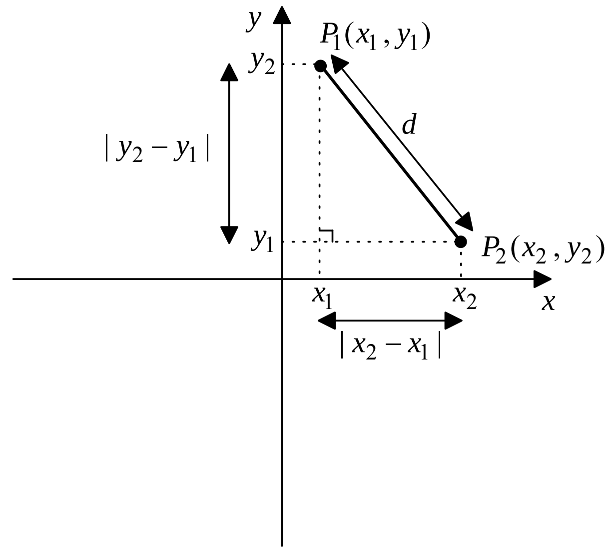
من قانون بيثاغورث:

$$d^2 =| x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2 \Rightarrow d = \sqrt{| x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1 |^2}$$

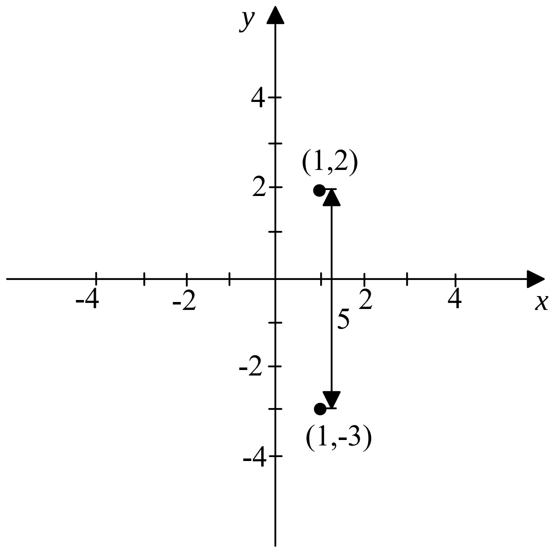
ولأن $| x_2 - x_1 |^2 = (x_2 - x_1)^2$ و $| y_2 - y_1 |^2 = (y_2 - y_1)2$

فالمسافة بين النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



الرسم 3



الرسم 4

مثال ١: أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

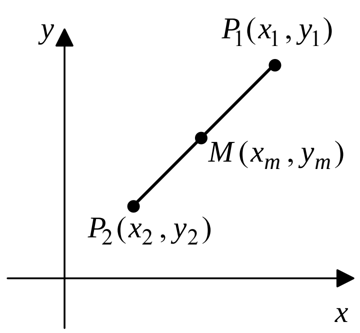
نستخدم قانون المسافة علما بأن $x_1 = -3$ ، $x_2 = 7$ ، $y_1 = 4$ و $y_2 = 2$ كالتالي:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \approx 10.2$$

٣. إحداثيات نقطة الوسط

إحداثيات نقطة الوسط (x_m, y_m) لخط مستقيم معين (كما هو موضح في الرسم 5) هما متوسط إحداثيات x لنقطتي أطراف الخط ومتوسط إحداثيات y لنقطتي أطراف الخط. فيكون القانون كالتالي:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



الرسم 5

مثال ٢: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للخط المربوط بالنقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

نستخدم قانون نقطة الوسط علما بأن $x_1 = -3$ ، $x_2 = 7$ ، $y_1 = 4$ و $y_2 = 2$ كالتالي:

$$(x_m , y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (2,3)$$

تمارين

تمرين ١: ارسم النقاط التالية على نظام محاور ديكارتي

$1)(2,4) \quad 2)(0,-3) \quad 3)(-2,1) \quad 4)(-5,-3)$

$5)(-3,-5) \quad 6)(-4,3) \quad 7)(0,2) \quad 8)(-2,0)$

تمرين ٢: أوجد المسافة بين النقاط التالية

$1)(6,4),(-8,11) \qquad 2)(-4,-20),(-10,15)$

$3)(5,-8),(0,0) \qquad 4)(\sqrt{3},\sqrt{8}),(\sqrt{12},\sqrt{27})$

$5)(a,b),(-a,-b) \qquad 3)(a-b,b),(a,a+b)$

$7)(x,4x),(-2x,3x)\ x<0 \qquad 8)(x,4x),(-2x,3x)\ x>0$

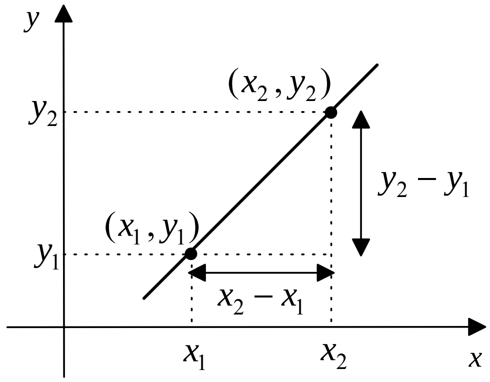
تمرين ٣: أوجد إحداثيات نقطة الوسط للخطوط المستقيمة التالية

$1)(1,-1),(5,5) \quad 2)(4,7),(6,10) \quad 3)(6,-3),(6,11) \quad 4)(2a,0),(0,2b)$

٤. ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم (m) الغير عمودي هو قياس عدد الوحدات التي يرتفع (أو ينزل) بها الخط عموديا لكل وحدة تغير أفقيا من اليسار إلى اليمين. عاين النقطتين (x_1, y_2) و (x_2, y_2) على الخط المستقيم في الرسم6. فكلما تحركت من اليسار إلى اليمين على الخط المستقيم سترتفع مسافة معينة تقابلها مسافة معينة في الاتجاه الأفقي، تسمي المسافتين التغير في y $(\Delta y = y_2 - y_1)$ والتغير في x $(\Delta x = x_2 - x_1)$.

فبهذا التعريف يصبح قانون الميل كالتالي:

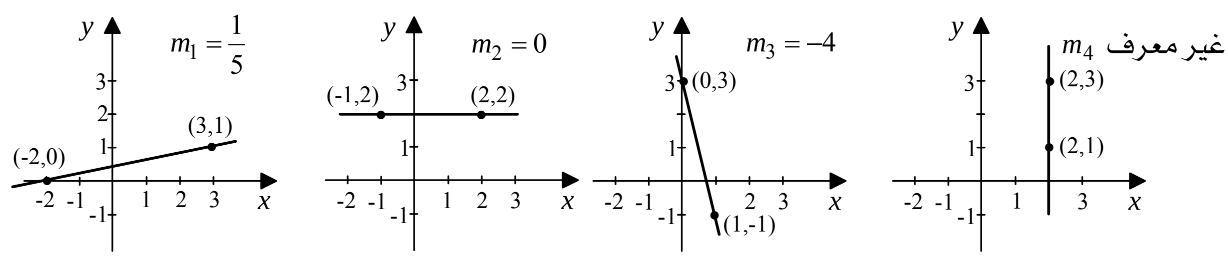


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الرسم6

عند استخدام القانون نلاحظ أن: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

الرسم 7 تبين أربعة خطوط مستقيمة: ميل الخط الأول موجب، ميل الخط الثاني يساوي صفر، ميل الخط الثالث سالب وميل الخط الرابع غير معرف. عموما كلما ازدادت القيمة المطلقة للميل ازدادت حدة ارتفاع أو نزول الخط.



إذا كان m غير معرف فالخط عمودي

إذا كان $m < 0$ فالخط ينزل من اليسار إلى اليمين

إذا كان $m = 0$ فالخط أفقي

إذا كان $m > 0$ فالخط يرتفع اليسار إلى اليمين

الرسم7

٥. معادلة الخط المستقيم

١,٥. طريقة الميل ونقطة

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1, y_1). إذا كانت (x, y) نقطة أخرى على الخط إذا من قانون الميل: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ومن هذا القانون نصل إلى معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال ٣: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة $(1, -2)$

الحل:

في هذا المثال $m = 3$ و $(x_1, y_1) = (1, -2)$ إذا بالتعويض المباشر في القانون نجد:

$$y = 3(x - 1) + (-2) = 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

إذا معادلة الخط المستقيم هي: $y = 3x - 5$

مثال ٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(2,5)$

الحل:

في هذه الحالة نستخدم النقطتين لإيجاد ميل الخط ثم نستخدم هذا الميل مع إحدى النقطتين المعطاة لإيجاد معادلة الخط بنفس الطريقة المذكورة في المثال ٣.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذا باستخدام $m = -1$ والنقطة $(4,3)$ مثلا تكون معادلة الخط كالتالي:

$$y = -1(x - 4) + 3 = -x + 4 + 3 = -x + 7$$

٢,٥. طريقة الميل والجزء المقطوع

عادة ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تسمى طريقة الميل والجزء المقطوع. وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y = mx + b$$

حيث m هو ميل الخط و b يمثل الجزء (أو المسافة) المقطوع (ة) على المحور y عند النقطة $(0,b)$.

وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي

مثال ٥: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويمر بالنقطة $(1,3)$

الحل:

بتعويض قيمة الميل في شكل المعادلة المعطاة أعلاه يكون لدينا: $y = 2x + b$

ثم نعوض قيم إحداثيات النقطة التي يمر بها الخط لإيجاد قيمة الجزء المقطوع b ، فتصبح المعادلة:

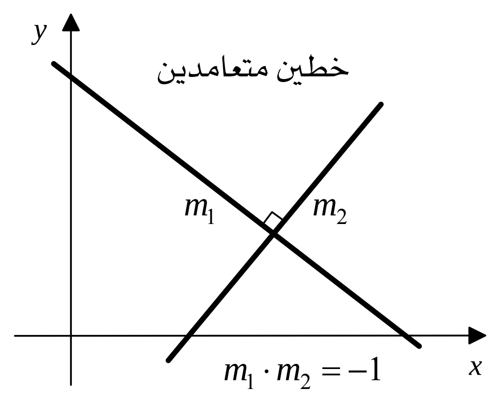
$3 = 2\times 1 + b$ ومنه $b = 3 - 2 = 1$ وبالتالي معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي: $y = 2x + 1$

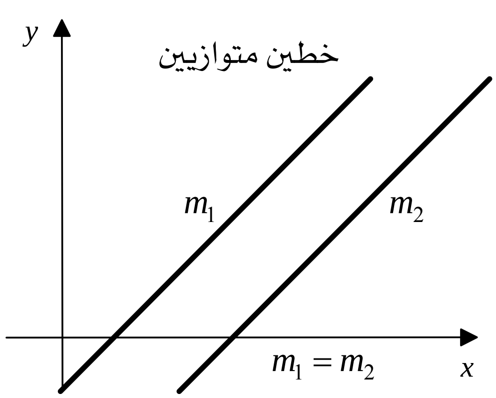
خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y = m(x - x_1) + y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y = mx + b$
- شكل المعادلة (الخط يمر بنقطة الأصل): $y = mx$
- الخط الأفقي(الميل يساوي صفر): $y = b$
- الخط العمودي (الميل غير معرف): $x = a$

٦. الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة هل خطين هما متوازيين أو متعامدين كما هم موضح في الرسم 8. وبالتحديد خطين غير عموديين، متوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$ ويكونا متعامدان إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $.(m_1 = -\frac{1}{m_2})$





الرسم 8

مثال ٦: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة $(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) الخط موازي للخط المستقيم $2x - 3y = 5$

b) الخط متعامد على الخط المستقيم $2x-3y=5$

الحل:

أولا نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y=mx+b$ كالتالي:

$$2x-3y=5 \Rightarrow -3y=-2x+5 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

إذا ميل هذا الخط المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي:

a) ميل الخط المستقيم المطلوب $m=\frac{2}{3}$ لأن الخط المعطى موازي له. إذا الآن لدينا ميل ونقطة فيمكن إيجاد المعادلة الخط المستقيم بالطريقة المذكورة سابقا كالتالي:

$$y=m(x-x_1)+y_1=\frac{2}{3}(x-2)+(-1)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-1=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

b) في هذه الحالة الميل المطلوب يساوي معكوس الميل المعطى بتغيير الإشارة لأنه متعامد عليه أي:

$m=-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$ وباقي الحل يكون كما في الفقرة a) أي:

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+(-1)=-\frac{3}{2}x+\frac{6}{2}-1=-\frac{3}{2}x+\frac{4}{2}=-\frac{3}{2}x+2$$

٧. نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور

عادة ما نحتاج إلى معرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور. تكون إحداثية y تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور x وتكون إحداثية x تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور y. أي نعوض في المعادلة بي $x=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور y ثم بي $y=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور x.

مثال ٧: أوجد إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y=2x+3$ مع المحاور.

الحل:

التقاطع مع المحور y: $x=0 \rightarrow y=2\times 0+3=3$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0,3)$

التقاطع مع المحور x: $y=0 \rightarrow 2x+3=0 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

تمارين

تمرين ١: ارسم الخطوط التي تمر بالنقطة المعطاة مع كل ميل من (a) إلى (d)

$1)(2,3): \quad (a)0 \quad (b)1 \quad (c)-2 \quad (d)$ غير معرف

$2)(-4,1): \quad (a)3 \quad (b)-3 \quad (c)\frac{1}{3} \quad (d)0$

تمرين ٢: أوجد ميل الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقاط التالية:

$1)(3,-4),(5,2) \qquad 2)(2,1),(2,5) \qquad 3)(1,2),(-2,4) \qquad 4)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين ٣: أوجد ميل ونقطة التقاطع مع المحاور (إذا كان ذلك ممكنا) للخطوط التالية

$1)\,x+5y=20 \qquad 2)\,6x-5y=15 \qquad 3)\,x=4 \qquad 4)\,y=-1$

تمرين ٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

$1)(2,1),(0,-3) \qquad 2)(-3,-4),(1,4) \qquad 3)(0,0),(-1,3)$

$4)(-3,6),(1,2) \qquad 5)(1,-2),(3,-2) \qquad 6)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين ٥: أوجد معادلة الخط المستقيم التي تمر بالنقطة المعطاة والميل المعطى

$1)(0,3),m=\frac{3}{4} \quad 2)(0,0),m=\frac{2}{3} \quad 3)(-2,4),m=-\frac{3}{5}$

$4)(0,2),m=4 \quad 5)(0,4),m=0 \quad 6)(-1,2),m$ غير معرف

تمرين ٦: أوجد معادلة الخط العمودي التي يتقاطع مع المحور x عند النقطة 3

تمرين ٧: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة في حالات التالية:

(a) يكون الخط فيها موازي للخط المعطى

(b) يكون الخط فيها متعامد على الخط المعطى

$1)(2,1)\,,\,4x-2y=3 \qquad 2)(-3,2)\,,\,x+y=7 \qquad 3)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\,5x+3y=0$

$4)(-6,4)\,,\,3x+4y-7=0 \qquad 5)(2,5)\,,\,x=4 \qquad 6)(-1,0)\,,\,y=-3$

رياضيات تخصصية

مدخل إلى علم المثلثات

مدخل إلى علم المثلثات

٥

الجدارة: الإلمام بمبادئ علم المثلثات

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على:

- تصنيف وحساب الزوايا
- تحويل الزوايا من وحدة إلى أخرى وحساب قيم المثلثات للزوايا
- التعامل مع الدوال المثلثية واستنتاج العلاقة بينها
- استخدام المتطابقات الأساسية للمثلثات

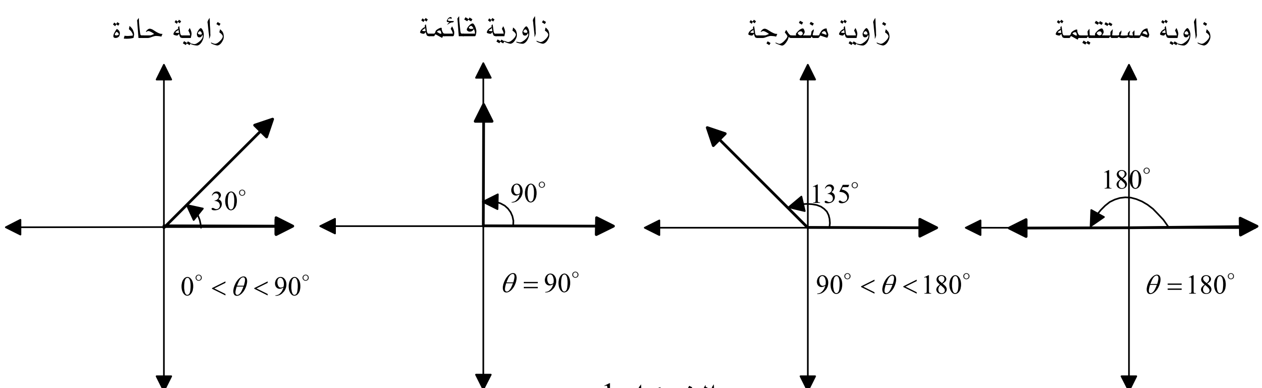
الوقت المتوقع للتدريب: أربع ساعات

مدخل إلى علم المثلثات

١. قياس الزوايا

قياس الزاوية هو مقدار دوران إحد أضلع الزاوية بالنسبة للضلع الثاني. وعادة ما نستخدم وحدة "الدرجة" لهذا القياس ($^\circ$). تكون قيمة القياس موجبة إذا كانت الزاوية مكونة من دوران في اتجاه معاكس لعقارب الساعة وسالبة إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة. قياس زاوية θ مشكلة من دورة كاملة في اتجاه عقارب الساعة هو 360° وبالتالي 1° هو قياس زاوية مشكلة من $\frac{1}{360}$ من دورة كاملة.

عادة ما نصف الزوايا إلى أربعة أصناف كما هم موضح في الشكل1 .



الشكل 1

كما أن في الساعة 60 دقيقة وفي الدقيقة 60 ثانية، فإن في الدرجة الواحدة (1°) 60 دقيقة ($60'$) وفي الدقيقة 60 الثانية ($60''$):

درجة واحدة (1°) = 60 دقيقة ($60'$)

دقيقة واحدة ($1'$) = 60 ثانية ($60''$)

فمثلا زاوية قياسها 61 درجة، 35 دقيقة و 47 ثانية تكتب بالشكل القياسي: $\theta = 61^\circ 35' 47''$

مثال ١: أعد كتابة $\theta = 43^\circ 74' 89''$ بالشكل القياسي

الحل:

من الواضح أن: $74' = 60' + 14' = 1^\circ 14'$ و $89'' = 60'' + 29'' = 1' 29''$

إذاً: $\theta = 43^\circ 74' 89'' = (43^\circ + 1^\circ)(14' + 1')(29'') = 44^\circ 15' 29''$

مثال ٢: أوجد $2)75^\circ 23'41'' + 34^\circ 47'25'' \qquad 1)360^\circ - 75^\circ 18'48''$

الحل:

$$1)360^\circ - 75^\circ 18'48'' = (359^\circ 59'60'') - (75^\circ 18'48'') = (359^\circ - 75^\circ)(59' - 18')(60'' - 48'')$$

$$= 284^\circ 41'12''$$

$$2)75^\circ 23'41'' + 34^\circ 47'25'' = (75^\circ + 34^\circ)(23' + 47')(41'' + 25'') = 109^\circ 70'66''$$

$$= (109^\circ + 1^\circ)(10' + 1')(6'') = 110^\circ 11'6''$$

الآلة الحاسبة تظهر قياس الزاوية على الشكل العشري، فمثلا الزاوية $47^\circ 30'$ تظهر على الآلة على شكل 47.5° والزاوية $23^\circ 45'$ تظهر على شكل 23.75°. إذا نحتاج إلى معرفة تحويل الكتابة العشرية إلى الكتابة على الشكل القياسي والعكس.

مثال ٣: حول 1) $\theta = 43^\circ 25'51''$ إلى الشكل العشري و 2) $\theta = 23.456^\circ$ إلى الشكل القياسي

الحل:

من المعلوم أن: $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ و $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ إذا:

$$1)\ \theta = 43^\circ 25'51'' = 43^\circ + \left(\frac{25}{60} + \frac{51}{3600}\right)^\circ = 43.431^\circ$$

$$2)\ \theta = 23.456^\circ = 23^\circ + 0.456^\circ = 23^\circ + 0.456 \times 60' = 23^\circ + 27.36'$$

$$= 23^\circ + 27' + 0.36 \times 60'' = 23^\circ + 27' + 21.6'' \approx 23^\circ 27'22''$$

هناك وحدة أخرى يتم استعمالها في قياس الزوايا وتسمى هذه الوحدة الرادين (radians) وعادة ما يرمز لها بالحروف اللاتينية rd. سبق وذكرنا أن دورة كاملة تمثل زاوية قياسها 360° فهنا نعرف أن قياس هذه الزاوية بالوحدة الجديدة تساوي $2\pi\, rd$ أي أن 360° تعادل $2\pi\, rd$ فبالتالي:

$2\pi\, rd = 360^\circ \Rightarrow \pi\, rd = 180^\circ$ أو بمعنى آخر:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rd \qquad \text{أو} \qquad 1rd = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

ملاحظة الآلة الحاسبة تظهر $1^\circ = 0.017453293rd$ و $1rd = 57.29577951^\circ$

مثال٤: حول كل مما يلي: إلى درجة $(^\circ)$ $2)\ \dfrac{\pi}{4}rd\ ,\ -5rd$ ، إلى رادين (rd) $1)150^\circ\ ,\ 548^\circ 23' 15''$

الحل:

$$1)\frac{\pi}{4}rd=\frac{\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=45^\circ \qquad , \qquad -5rd=-5\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-5\times 57.296^\circ=-286^\circ 28' 48''$$

$$2)150^\circ=150\left(\frac{\pi}{180}\right)rd=\frac{5\pi}{6} \qquad , \qquad 548^\circ 23' 15''=548.3875^\circ=548.3875\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx 9.5958\ rd$$

بعض الزوايا المشهورة بالدرجة والرادين					
$(^\circ)$	(rd)		$(^\circ)$	(rd)
0	0		120	$\frac{2\pi}{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$		180	π
45	$\frac{\pi}{4}$		240	$\frac{4\pi}{3}$
60	$\frac{\pi}{3}$		270	$\frac{3\pi}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$		360	2π

تمارين

تمرين ١: صنف الزوايا التالية إلى حادة أو منفرجة أو لا صنف لها

$1)\,225^\circ \qquad 2)\,15^\circ 4' 9'' \qquad 3)\,0^\circ \qquad 4)\,\pi\, rd$

تمرين ٢: قم بالعماليات التالية:

$1)\,15^\circ 25' 35'' + 43^\circ 35' 27'' \qquad 1)\,109^\circ 47' 38'' + 43^\circ 35' 27''$

$3)\,57^\circ 43' 28'' - 27^\circ 31' 49'' \qquad 4)\,123^\circ 13' 20'' - 27^\circ 31' 49''$

تمرين ٣: أعد كتابة الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة، الدقيقة والثانية

$1)\,40.25^\circ \qquad 2)\,75.2^\circ \qquad 3)\,17.45^\circ \qquad 4)\,96.6^\circ$

تمرين ٤: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة

$1)\,\frac{\pi}{3} \qquad 2)\,\frac{3\pi}{2} \qquad 3)\,-\frac{\pi}{6} \qquad 4)\,\frac{3\pi}{4} \qquad 5)\,\frac{5\pi}{6} \qquad 6)\,-\frac{4\pi}{5}$

$7)\,3\pi \qquad 8h)\,-4\pi \qquad 9)\,2 \qquad 10)\,5.3 \qquad 11)\,-6.4 \qquad 12)\,-8$

تمرين ٥: حول قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الرادين

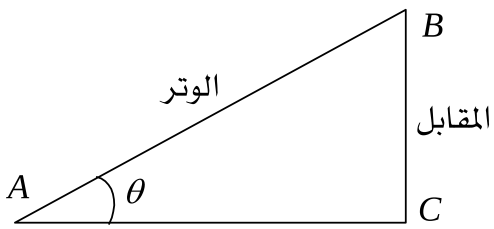
$1)\,45^\circ \qquad 2)\,225^\circ \qquad 3)\,75^\circ \qquad 4)\,-135^\circ \qquad 5)\,7^\circ 30' \qquad 6)\,-270^\circ$

٢. مثلثيات زاوية حادة

عاين المثلث القائم الزاوية ABC في الشكل 2. نسمي ضلع المثلث المقابل للزاوية C بالوتر. ولنسمي الزاوية التي رأسها A الزاوية θ ، بهذا الشكل يسمى الضلع $\overline{AC}$ المجاور (بالنسبة لي θ) ، ويسمى الضلع $\overline{BC}$ المقابل (بالنسبة θ). يطلق على مثلثيات الزاوية θ الأسماء التالية:

sine, cosine, tangent, cotangent, cosecant and secant

يرمز لقيم هذه المثلثيات عند θ بي: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ... إلخ.
وتعرف هذه القيم باستخدام طول أضلاع المثلث كالتالي:



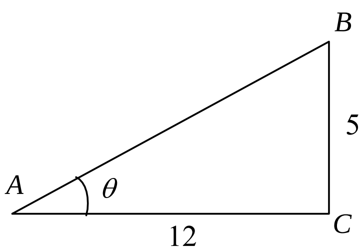
الشكل 2

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AB} \qquad \csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{AC}{BC}$$

مثال ٥: احسب قيم المثلثيات الزاوية θ



الحل:

أولا نحتاج إلى إيجاد طول الوتر وهذا ممكن باستخدام قانون فيثاغورث للمثلث القائم الزاوية ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = \sqrt{169} = 13$$

ومنه تكون قيم مثلثيات الزاوية θ كالتالي

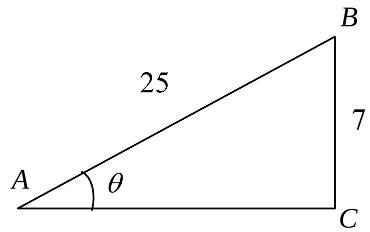
$$\sin\theta = \frac{5}{13} \quad \cos\theta = \frac{12}{13} \quad \tan\theta = \frac{5}{12} \quad \csc\theta = \frac{13}{5} \quad \sec\theta = \frac{13}{12} \quad \cot = \frac{12}{5}$$

مثال ٦ : أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$.

الحل:

لأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$ فيمكن افتراض أن $BC = 7$ و $AB = 25$ (بدون تقليص من عمومية الحل). ومن قانون فيثاغورث:
$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \Rightarrow AC = \sqrt{576} = 24$$

وبالتالي:
$$\cos\theta = \frac{24}{25} \qquad \tan\theta = \frac{7}{24}$$



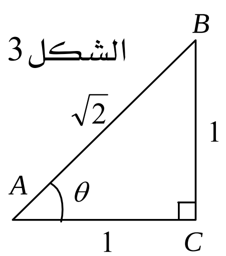
١,٢. مثلثيات بعض الزوايا المشهورة

كثير ما نتعرض في حساب المثلثيات إلى زوايا تتكرر معنا كثيراً يجب على الطالب أن يحفظ قيم مثلثياتها. في هذه الفقرة سنكتفي بشرح طريقة إيجاد قيم مثلثيات الزاوية 45° فقط وباقي الزوايا المشهورة سنذكر فقط قيم مثلثياتها بدون شرح.

لنعاين المثلث القائم الزاوية ABC في الشكل 3 حيث تكون فيه الزاوية A تساوي 45°. من السهل استنتاج أن الزاوية B تساوي كذلك 45° وبالتالي يكون المثلث ABC متساوي الضلعين AC و BC. بدون تقليص من عمومية الاستنتاج لنفرض أن $AC = AB = 1$ وبتطبيق قانون فيثاغورث يكون $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$ وبالتالي:

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta = \frac{1}{1} = 1$$

الشكل 3



مثلثيات زوايا مشهورة			
$\theta\,(^\circ, rd)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

٢,٢. حل المثلثات القائمة الزاوية

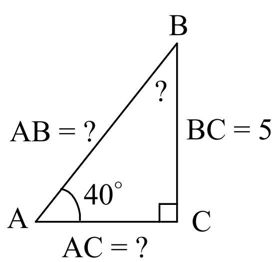
يتكون شكل المثلث من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا. لنفرض أننا نعرف قياس بعض الأضلع وبعض الزوايا. فعملية إيجاد قياس الأضلع والزوايا الباقية تسمى حل المثلث. وسنتطرق في الأمثلة التالية إلى كيفية استخدام علم المثلثيات في حل مسائل من هذا النوع.

مثال ٧: حل المثلث القائم الزاوية ABC حيث $BC = 5$ و الزاوية التي رأسها A تساوي 40°.

الحل:

أولا نقوم برسم المثلث على حسب المعطيات في السؤال كما هو مبين في الرسم التالي:

فمن الواضح أنه يجب علينا إيجاد الزاوية B والأضلع AB و AC مع العلم أن الزاوية القائمة C تساوي 90°. بما أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° إذاً:



$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$$

(هنا نقصد الزوايا التي رؤوسها A, B, C) ومنه باستخدام المثلثيات:

$$\sin 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 40^\circ} = \frac{5}{0.6427} \Rightarrow AB \approx 7.8$$

يبقى علينا إيجاد طول الضلع AC الذي يمكن حسابه باستخدام قانون فيثاغورث أو إحدى المثلثيات المناسبة. وبقانون فيثاغورث:

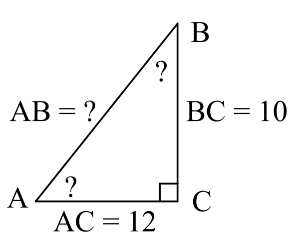
$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (7.8)^2 - 5^2 = 60.84 - 25 = 35.84 \Rightarrow AC = \sqrt{35.84} \approx 6$$

وهكذا تصبح قياس كل زوايا وأضلاع المثلث معروفة.

مثال ٨: حل المثلث القائم الزاوية حيث $BC = 10$ و $AC = 12$.

الحل:

هنا في هذه الحالة المعطيات هما ضلعان. فبالنسبة للضلع الثالث AB يمكن استخدام قانون فيثاغورث:



$$AB^2 = 12^2 + 10^2 = 244 \Rightarrow AB \approx 15.6$$

وباستخدام المثلثية tan نحسب الزاوية A:

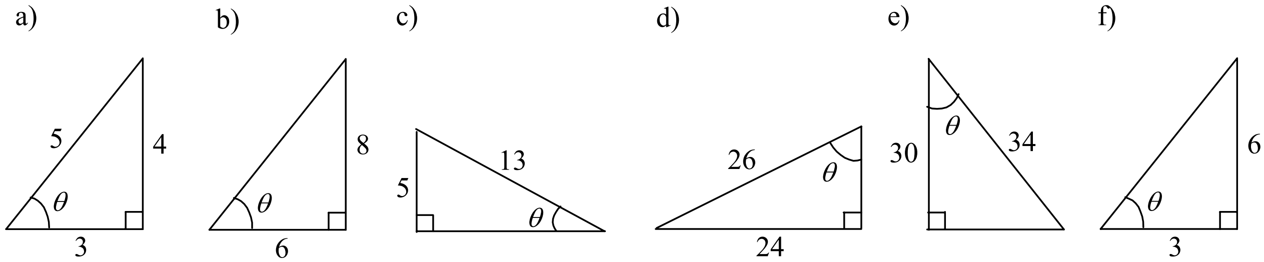
$$\tan A = \frac{10}{12} \approx 0.8333 \Rightarrow A \approx 39^\circ 48'$$

والزاوية B يمكن حسابها من أن مجموع الزوايا الثلاثة يساوي 180°:

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (39^\circ 48' + 90^\circ) = 180^\circ - 129^\circ 48' = 50^\circ 12'$$

تمارين

تمرين ١: أوجد القيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ في الحالات التالية:



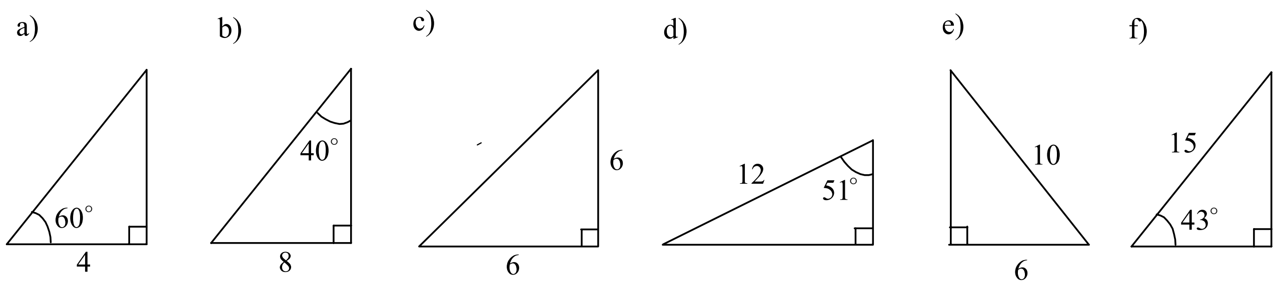
تمرين ٢: استخدم الرسم التالي لإيجاد $\sin 45^\circ$ ، $\cos 45^\circ$ ، $\sin 30^\circ$ و $\cos 30^\circ$

تمرين ٣: 1) أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$

2) أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\tan\theta$ علما بأن $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

3) أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ علما بأن $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$

تمرين ٤: أوجد قيم الزوايا والأضلاع الغير معروفة في الحالات التالية:



٣. مثلثيات أي زاوية

هنا في هذه الفقرة سنعرف مثلثيات أي زاوية بحيث يكون هذا التعريف شاملا لتعريف مثلثيات الزاوية الحادة التي سبق وتكلمنا عليها. لهذا الغرض لنفرض الزاوية θ في شكلها القياسي (أي رأس الزاوية على نقطة الأصل) (الشكل1) ولتكن النقطة $P(x,y)$ (تختلف عن نقطة الأصل) على إحد أضلع الزاوية θ.
من قانون فيثاغورث: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ وتعرف مثلثيات θ باستخدام الإحداثيات (x,y) والمسافة r كالتالي:

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

مثال ٩: لتكن النقطة $P(3,4)$ (الشكل 2) على أحد أضلع الزاوية θ. أوجد مثلثيات θ.

الحل:

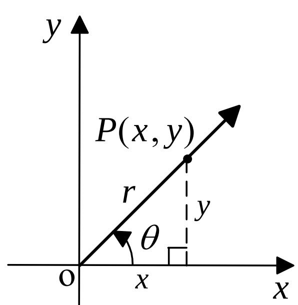
في هذه الحالة: $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$ إذا:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$$

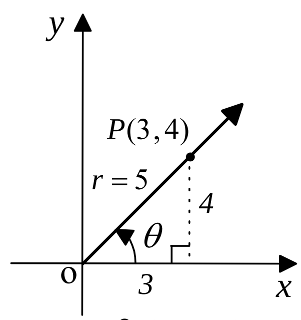
مثال ١٠: أوجد مثلثيات الزاوية $\theta=0^\circ$.

الحل: في هذه الحالة لنختار النقطة $P(1,0)$ (الشكل 3) فمن الواضح أن $r=OP=1$
وبالتالي:

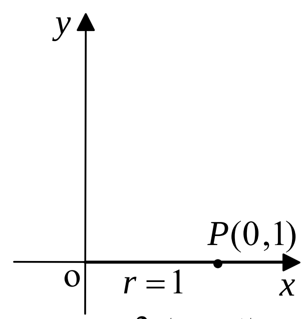
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0 \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1 \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0$$



الشكل1



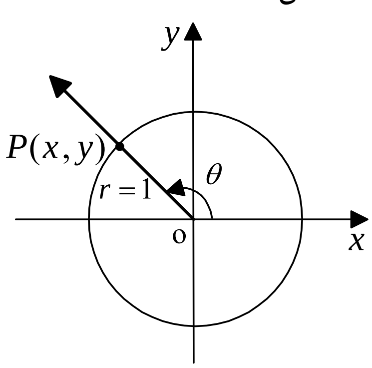
الشكل 2



الشكل 3

يمكن اختصار تعريف الدوال المثلثيات باختيار النقطة P على دائرة الوحدة (الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي 1) التي تتقاطع مع ضلع الزاوية، أو بمعنى آخر اختيار P بحيث $r=OP=1$ (الشكل 4) فبالتالي:

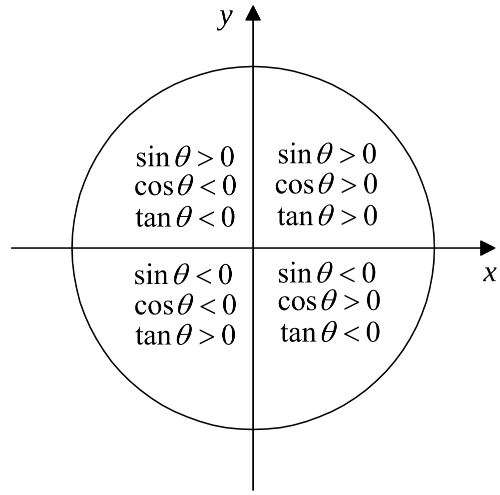
$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cos\theta=x \qquad \sin\theta=y$$



الشكل 4

وبما أن قيمتي x و y محصورتين بين -1 و 1 فإن:

$$-1\le\cos\theta\le1 \qquad \text{و} \qquad -1\le\sin\theta\le1$$



ومن هذا التعريف يمكن معرفة إشارة هذه المثلثيات $\sin e, \text{cosine}, \text{tangent}$ كالتالي:

- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ موجبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني قيمة $\sin\theta$ موجبة وقيم $\cos\theta, \tan\theta$ سالبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta$ سالبة وقيمة $\tan\theta$ موجبة
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون قيم $\sin\theta, \tan\theta$ سالبة وقيمة $\cos\theta$ موجبة

تمارين

تمرين ١: أوجد مثلثيات الزاوية θ عندما تكون إحداثيات النقطة P :

$1)\,P(2,3) \qquad 2)\,P(3,-4) \qquad 3)\,P(1,\sqrt{3}) \qquad 4)\,P(1,2\sqrt{2}) \qquad 5)\,P(2,0)$

تمرين ٢: أوجد قيم $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ عندما تكون الزاوية θ تساوي:

$1)\,180^\circ \qquad 2)\,\frac{3\pi}{2} \qquad 3)\,360^\circ \qquad 4)\,-\pi$

تمرين ٣: أوجد قيمة $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ أو $\tan\theta$ على حسب المعطيات:

$1)\,\sin\theta=\frac{5}{13}\,,\ \cos\theta=\frac{12}{13} \qquad 2)\,\cos\theta=\frac{3\sqrt{34}}{34}\,,\ \tan\theta=\frac{5}{3} \qquad 3)\,\sin\theta=-\frac{4}{5}\,,\ \tan\theta=\frac{4}{3}$

تمرين ٤: أوجد إشارة قيم المثلثيات التالية:

$1)\,\cos 50^\circ \qquad 2)\,\sin\frac{5\pi}{6} \qquad 3)\,\tan 125^\circ \qquad 4)\,\sin 247^\circ \qquad 5)\,\cos(-119^\circ)$

تمرين ٥: أوجد القيم الحقيقية للمثلثيات التالية:

$1)\,120^\circ \qquad 2)\,135^\circ \qquad 3)\,210^\circ \qquad 4)\,\frac{5\pi}{3} \qquad 5)\,\frac{7\pi}{4} \qquad 6)\,-30^\circ \qquad 7)\,-\frac{\pi}{4} \qquad 8)\,-150^\circ$

تمرين ٦: احسب ما يلي $[\sin^2\theta=(\sin\theta)^2]$:

$1)\,\sin^2 0^\circ+\cos^2 0^\circ \qquad 2)\,\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2} \qquad 3)\,2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$

$4)\,\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} \qquad 5)\,\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} \qquad 6)\,1+\tan^2\frac{\pi}{2}$

٤. المتطابقات الأساسية للمثلثيات

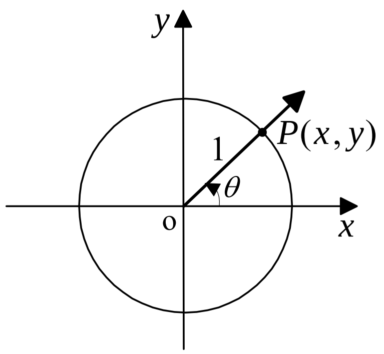
كما رأينا من قبل باستخدام دائرة الوحدة والنقطة $P(x,y)$

(الشكل5) توصلنا إلى أن:

$\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y$ ومنه يمكن أن نقول:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + y^2$$

ومع أن $x^2 + y^2 = r^2 = 1$ (دائرة الوحدة) إذا:



الشكل5

$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ (وهذا يصلح لأي زاوية θ)

فمثلا: $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ومن هذه المتطابقة يمكن استنتاج متطابقات أخرى، فمثلا بتقسيم طرفي هذه المتطابقة على $\cos^2\theta$:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right)$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\right)$$

بنفس الطريقة يمكن الوصول إلى: $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

مثال ١١: لتكن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ والزاوية θ موجودة في الربع الثاني. استخدم المتطابقة الأساسية لإيجاد $\cos\theta$.

الحل:

من التطابق الأساسي: $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ إذا:

$\cos\theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ ولأن المثلثية $\cos\theta$ سالبة في الربع الثاني فإذا أن نختار $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

كذلك يمكن أن نستخدم هذه المتطابقات في اختصار العبارات المثلثية كما في المثال التالي

مثال ١٢: اختصر العبارة التالية: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

الحل:

أولا نقوم بتفكيك الأقواس كالتالي: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1^2 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

ثم باستخدام المتطابقة المذكورة أعلاه نجد: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

٤,١. متطابقات جمع وطرح الزوايا

من التعريف السابق يمكن الوصول إلى متطابقات أخرى سنسردها هنا بدون شرح طريقة الوصول إليها.

١) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

٢) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

٣) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

٤) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

٥) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

٦) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

مثال ١٣: أوجد قيم: $a)\cos\dfrac{\pi}{12}\quad b)\cos\dfrac{5\pi}{12}\quad c)\sin\dfrac{\pi}{12}\quad d)\sin\dfrac{5\pi}{12}\quad e)\tan\dfrac{\pi}{12}\quad f)\tan\dfrac{7\pi}{12}$

الحل:

في مثل هذه الأسئلة نحاول كتابة الزاوية على شكل جمع أو طرح زوايا مشهورة قيم مثلثياتها معروفة

a) يمكن كتابة $\dfrac{\pi}{12}$ على شكل: $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ وباستخدام المتطابقة ٢) يكون لدينا:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0.97$$

b) بنفس الطريقة وباستخدام المتطابقة ١) يكون لدينا:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.26$$

c) باستخدام المتطابقة ٤) يكون لدينا:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.26$$

d) باستخدام المتطابقة ٣) يكون لدينا:

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0.97$$

e) باستخدام المتطابقة ٦) يكون لدينا:

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=2-\sqrt{3}\approx 0.27$$

f) باستخدام المتطابقة ٥) يكون لدينا:

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=-2-\sqrt{3}\approx -3.73$$

تمارين

تمرين ١: لتكن θ زاوية حادة بحيث $\sin\theta=\dfrac{a}{b}$. أوجد $\cos\theta$ و $\tan\theta$

تمرين ٢: لتكن الزاوية θ في الربع الثاني بحيث $a>0\ b>0$ ، $\tan=-\dfrac{b}{a}$. أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

تمرين ٣: اختصر كل مما يلي:

$$a)\frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\qquad b)\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\qquad c)\frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}\qquad d)\frac{1-\cos^2 t}{\tan^2 t}$$

$$e)\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}\qquad f)\frac{\sin x}{\sin x+1}+\frac{\cos x}{\sin x-1}\qquad g)\cos t-\frac{1}{\cos t}\qquad h)\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$$

تمرين ٤: باستخدام $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ أوجد القيم الحقيقية لي $\sin\dfrac{\pi}{12}\,,\cos\dfrac{\pi}{12}$

تمرين ٥: أوجد القيم الحقيقية للمثلثيات التالية:

$$a)\cos\frac{3\pi}{4}\quad b)\sin\frac{2\pi}{3}\quad c)\cos\frac{4\pi}{3}\quad d)\sin\frac{7\pi}{12}\quad e)\tan\frac{7\pi}{6}\quad f)\sin 240^\circ\quad g)\cos 210^\circ$$

تمرين ٦: ليكن $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$ و $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ حيث α موجودة الربع الثالث و β في الربع الأول. أوجد قيم:

$$a)\sin(\alpha+\beta)\qquad b)\tan(\alpha+\beta)$$

تمرين ٧: بين أن:

$$a)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\quad b)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\quad c)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\quad d)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$d)\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\quad e)\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\quad f)\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\quad c)\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

المملكـة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

الهندسة المستوية والفراغية

الهندسة المستوية والفراغية

٦

الجدارة: الالمام بالمبادئى الهندسيةالمستوية والفراغية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- الأشكال الهندسية المستوية(الأشكال الرباعية -المثلث -الدائرة)
- قوانين حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية
- الأشكال الهندسية الفراغية(المكعب -الإسطوانة -المخروط -الهرم -الكرة)
- قوانين حساب المساحة الجانبية وحجم الأشكال الهندسية الفراغية
- مبادىء الوحدات الهندسية وكيفية تحويل الوحدات

الوقت المتوقع للتدريب: خمس ساعات

الهندسة المستوية و الفراغية

١. الهندسة المستوية

الأشكال الهندسية المستوية تنقسم إلى قسمين هما:

- المضلعات.
- الدائرة.

١,١. الأشكال الرباعية

الشكل الرباعي هو كل شكل له أربعة أضلاع، وباستثناء شبه المنحرف نجد أن هذه الأشكال جميعا تشترك في صفات واحدة هي:

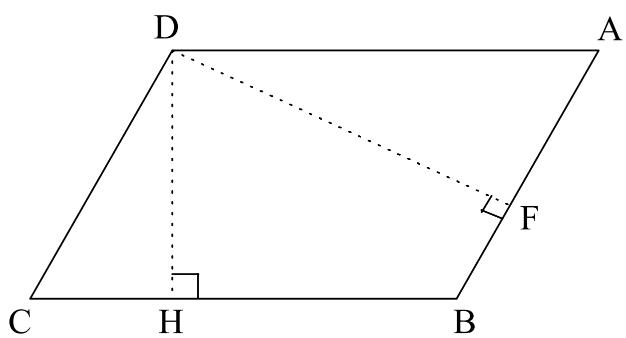
a) كل ضلعين متقابلين فيها متوازيان ومتطابقان (متساويان).

b) كل زاويتين متقابلتين متساويتان.

c) القطران ينصف كل منهما الآخر.

١,١,١. متوازي الأضلاع

محيط متوازي الأضلاع يعطى بالقاعدة التالية:



$P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين)

$= 2(AB + CD)$

وبشكل عام فإن محيط أي شكل هندسي يساوي مجموع أطوال أضلاعه ومساحته:

$A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليه

$$A = DH \times CB \quad or \quad A = DF \times AB$$

ملاحظة

- قاعدة متوازي الأضلاع هي أي ضلع من أضلاعه الأربعة.
- ارتفاع متوازي الأضلاع هو العمود النازل من أي رأس من رؤوسه على الضلع المقابل لهذا الرأس.
- القاعدة الصغرى يقابلها الارتفاع الأكبر والقاعدة الكبرى يقابلها الارتفاع الأصغر.

مثال ١: متوازي أضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8cm, 14cm$. احسب محيطه ومساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر $5cm$.

الحل:

المحيط يعطى بالقاعدة التالية: $P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين) ومنه

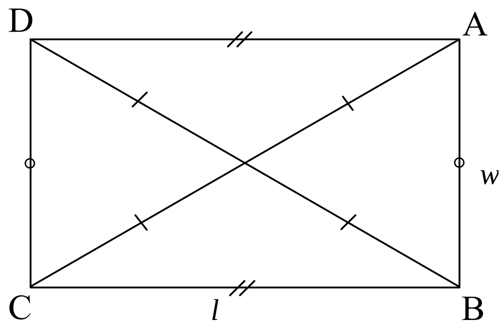
$$P = 2(8+14) = 44\,cm$$

المساحة: بما أن الارتفاع الأصغر يقابل القاعدة الكبرى والمساحة تعطى بالقاعدة التالية:

$A =$ طول الارتفاع × طول القاعدة $= 5 \times 14 = 70\,cm^2$

٢,١,١. المستطيل

هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة.



- **المحيط**

$P = 2\,[$ العرض (w) + الطول (l) $] = 2(AB+CD)$

- **المساحة**

$A =$ العرض (w) × الطول (l) $= AB \times CD$

مثال ٢: مستطيل طوله $17\,cm$ وعرضه $11cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 2\,[$ العرض (w) + الطول (l) $] = 2(11+17) = 56\,cm$

المساحة: $A =$ العرض (w) × الطول (l) $= 11 \times 17 = 187\,cm^2$

مثال ٣: مستطيل مساحته $320\,cm^2$ ، فإذا كان عرضه 16. احسب محيطه.

الحل:

العرض (w) ÷ (A) المساحة = الطول (l)

$$l = \frac{320}{16} = 20cm$$

ومنه المحيط (P)

$P = 2\,[$ العرض (w) + الطول (l) $= 2(16+20) = 72\,cm]$

مثال ٤: مستطيل عرضه $7\,cm$.وطوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه. احسب كل من محيطه ومساحته.

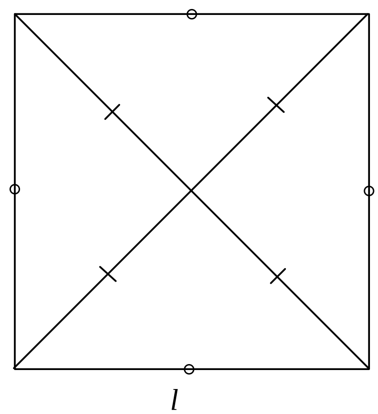
الحل:

بما أن طول المستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه إذاً طوله (L): $L = 3 \times 7 = 21cm$

المحيط: $P = 2\ [\text{العرض}\ (w) + \text{الطول}\ (l)] = 2(7+21) = 56cm$

المساحة: $A = \text{العرض}\ (w) \times \text{الطول}\ (l) = 7 \times 21 = 147\,cm^2$

٣,١,١. المربع



هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متساوية

- **محيط المربع** (P): $P = 4 \times \text{طول الضلع}\ (l) = 4l$
- **مساحة المربع** (A): $A = \text{الضلع}\ (l) \times \text{الضلع}\ (l) = l^2$

مثال ٥: مربع طول ضلعه $9cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4 \times \text{طول الضلع}\ (l) = 4l = 4 \times 9 = 36cm$

المساحة: $A = \text{الضلع}\ (l) \times \text{الضلع}\ (l) = l^2 = 9^2 = 81cm^2$

مثال ٦: مربع محيطه $48cm$ احسب مساحته.

الحل:

طول ضلع المربع: $l = P \div 4 = 48 \div 4 = 12cm$

المساحة: $A = l^2 = (12)^2 = 144\,cm^2$

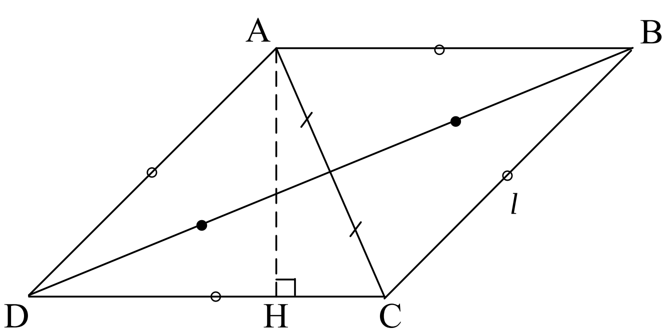
مثال ٧: مربع مساحته $49\,cm^2$ احسب محيطه.

الحل:

طول الضلع: $l = \sqrt{A} = \sqrt{49} = 7\,cm$

المحيط: $P = 4 \times \text{طول الضلع}\ (l) = 4l = 4 \times 7 = 28cm$

٤,١,١. المعين



هو متوازي أضلاع يتميز بالخواص الآتية:

a) كل ضلعين متقابلين متوازيان.

b) أضلاعه الأربعة متساوية.

c) كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان ولا يشترط أن تكون قائمة.

d) قطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وكل قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينها.

- **محيط المعين** $P = 4 \times$ طول الضلع (l)
- **مساحة المعين** $A = DC \times AH$

أي أن المساحة = طول القاعدة × طول الارتفاع

ويمكن إيجاد المساحة بدلالة القطرين حيث تكون المساحة

$A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني)

مثال ٨: قطعة سجاد على شكل معين طول ضلعه $13cm$ وطول ارتفاعه $5cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4 \times$ طول الضلع $(l) = 4l = 4 \times 13 = 52\,cm$

المساحة: $A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع $= 13 \times 6 = 78\,cm^2$

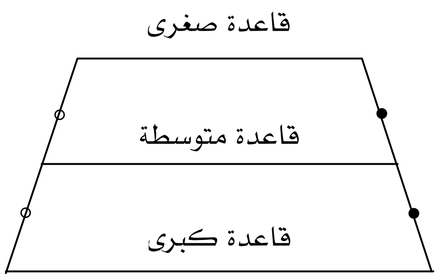
مثال ٩: غرفة على شكل معين طولا قطريها $4m, 7m$ أراد صاحبها رصفها ببلاط سعر المتر المربع منه 15 ريال، احسب التكلفة

الحل:

مساحة الغرفة $A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني) $= \frac{1}{2}(4 \times 7) = 14\,m^2$

التكلفة: $14 \times 15 = 210$ ريال

٥,١,١. شبه المنحرف



هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويين ويسميان قاعدي شبه المنحرف الصغرى والكبرى.

- **محيط شبه المنحرف :** $P =$ مجموع أطوال أضلاعه الأربعة
- **مساحة شبه المنحرف**

$A =$ نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى × طول الارتفاع

أو: $A =$ طول قاعدته المتوسطة × طول الارتفاع

حيث طول القاعدة المتوسطة يساوي نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى.

مثال ١٠: شبه منحرف قاعدته المتوسطة طولها $17cm$ وطول ارتفاعها $11cm$. احسب مساحته.

الحل:

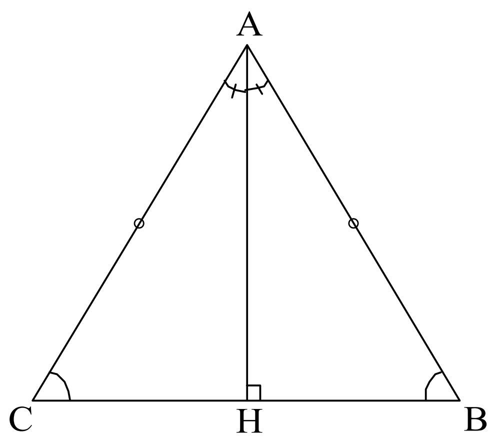
$$A =$$ طول قاعدته المتوسطة × طول الارتفاع $= 17 \times 11 = 187cm^2$

٢,١. المثلث

هو شكل يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا مجموع زواياه الداخلية 180°

أنواعه:

a) متساوي الأضلاع.
b) متساوي الساقين .
c) مختلف الأضلاع.
d) المثلث القائم الزاوية.



والشكل المقابل يبين مثلث متساوي الساقين والعمودي من رأس المثلث A على الضلع CB ينصف الزاوية $\angle CAB$

- **محيط المثلث**

محيط المثلث يعطى بمجموع أضلاعه $P = AB + BC + CA$

- **مساحة المثلث**

مساحة المثلث تعطى بالقاعدة التالية:

$A = \frac{1}{2} \times$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليها $= \frac{1}{2} \times CB \times AH$

مثال ١١: أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته $12cm$ وطول ارتفاعه $8cm$.

الحل:

مساحة المثلث : $A = \frac{1}{2} \times$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليها $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48cm^2$

مثال ١٢: مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $7cm$. احسب طول محيطه وإذا كان طول ارتفاعه $8cm$. فاحسب مساحته.

الحل:

المحيط: $P = 3 \times 7 = 21cm$

المساحة: $A = \frac{7 \times 8}{2} = 28cm^2$

٣,١. الدائرة

هي مجموعة النقاط التي تبعد نفس البعد عن نقطة ثابتة ، هذه النقطة تسمى بمركز الدائرة والبعد الثابت يسمى نصف قطر الدائرة

تعريفات

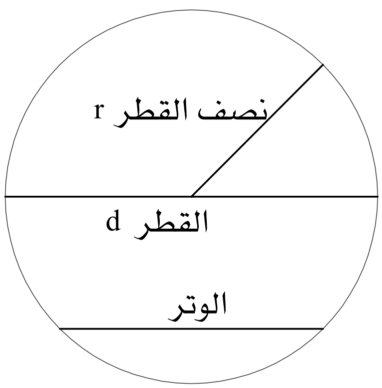
- نصف قطر لدائرة: هو قيمة ثابتة دائما بالنسب للدائرة الواحدة وهو المسافة بين مركز الدائرة و أي نقطة على محيطها.

-قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة والمارة بمركز الدائرة

-وتر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة

-مجموعة النقاط التي تمثل الدائرة تسمى محيط الدائرة

-المساحة المحصورة داخل نطاق المحيط تسمى مساحة الدائرة.



- **محيط الدائرة**

محيط الدائرة التي نصف قطرها r هو: $P = 2\pi r$

حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) و يساوي

$$\frac{22}{7} \approx 3,142$$

- **مساحة الدائرة:**

مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي: $A = \pi r^2$

مثال ١٣: سجادة دائرية الشكل طول قطرها $2.8m$ احسب كلا من طول محيطها ومساحتها.

الحل:

نصف القطر: $r = \frac{2.8}{2} = 1.4m$

المحيط: $P = 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 1.4 \approx 8.8m$

المساحة: $A = \pi r^2 = 3.14 \times (1.4)^2 \approx 6.2m^2$

مثال ١٤: حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66m$ احسب مساحتها

الحل:

نصف القطر: $r = 66 \div 3.14 \approx 21\ m$

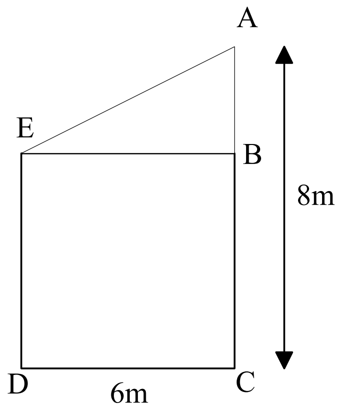
المساحة: $A = \pi r^2 = 3.14 \times (21)^2 \approx 1385m^2$

تمارين

١) قطعة خشب على شكل متوازي الأضلاع طول قاعدتها $15cm$ وارتفاعها $6cm$ ، ما مساحتها؟

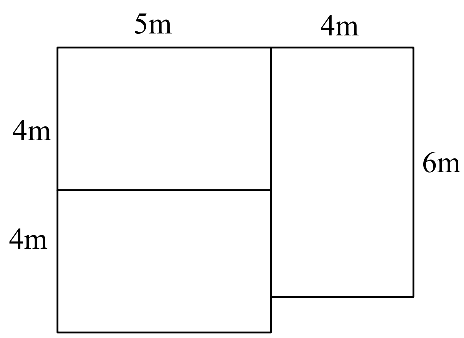
٢) متوازي الأضلاع مساحته مساحة مربع طول ضلعه $12cm$ ، احسب طول قاعدة متوازي الأضلاع إذا علمت أن طول ارتفاعه $10cm$.

٣) لوح معدني على شكل متوازي الأضلاع، طول قاعدته $50cm$ ، وطول ارتفاعه $10cm$ ، كم لوحا من هذا النوع نحتاج لرصف محل تجاري مساحتها $12.35m^2$ ؟

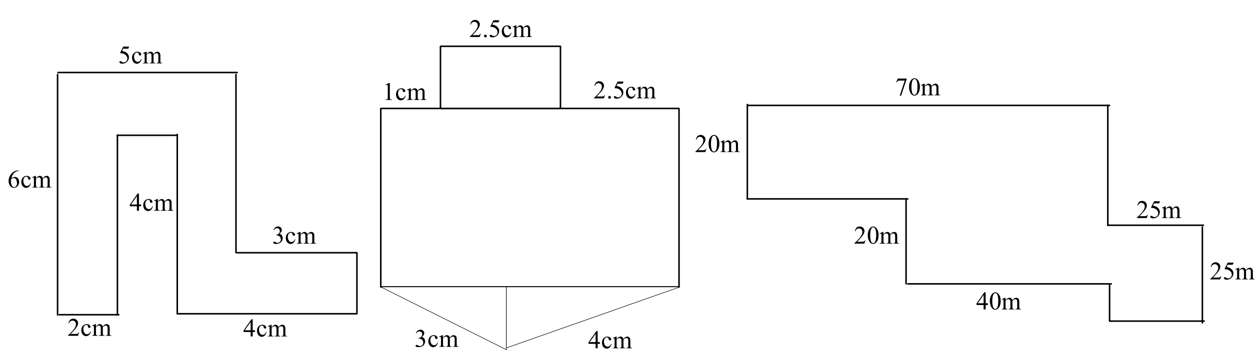


٤) الشكل المقابل يمثل المضلع $ABCDE$ ، حيث $BCDE$ مربع. احسب مساحة $ABCDE$ إذا كان طول AC يساوي $8cm$ وطول CD يساوي $6cm$.

٥) الشكل المقابل يمثل مخطط بيت مؤلف من ثلاث غرف. احسب مساحة هذا البيت.

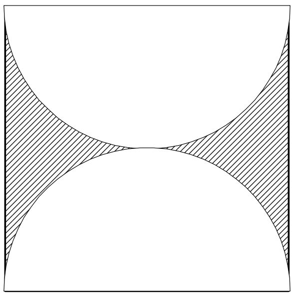


٦) أوجد مساحة كل من الأشكال التالية:



٧) دراجة هوائية طول قطر عجلتها $42cm$ ، احسب المسافة التي تقطها الدراجة عندما تدور العجلة 560 دورة.

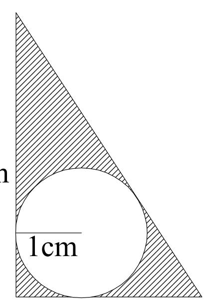
٨) احسب مساحة الجزء المظلل في الشكل المقابل

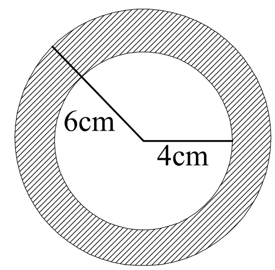


٩) أرض مستطيلة الشكل عرضها $60m$ ، نريد أن نبني فيها حديقة أكبر ما يمكن، ما هي مساحة هذه الحديقة؟

١٠) طاولة طعام، وسطها مستطيل طوله $220cm$ وأطرفاها نصف دائرة قطرها $140cm$. ما محيط هذه الطاولة؟ وما مساحتها؟

١١) احسب مساحة الجزء المظلل في كل من الأشكال التالية:





١٢) حديقة مربعة الشكل طول ضلعها $27m$ ، أنشأنا في وسطها حوض ماء دائري الشكل، طول نصف قطره $10m$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٣) حديقة مستطيلة الشكل، بعداها $27m,39m$ ، أقمنا بمحاذاة محيطها ممرا عرضه $127cm$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٤) مربع ودائرة لهما نفس المحيط ، ويساوي $31.4cm$ أيهما أكبر مساحة ؟

١٥) مربع ومستطيل لهما نفس المساحة وتساوي $81cm^2$. أوجد طول ضلع المربع ومحيط المستطيل إذا كان طوله يساوي ضعف طول المربع.

١٦) مربع ومستطيل لهما نفس المحيط، إذا كان طول المستطيل $17m$ وعرضه $12m$. أوجد مساحة المربع.

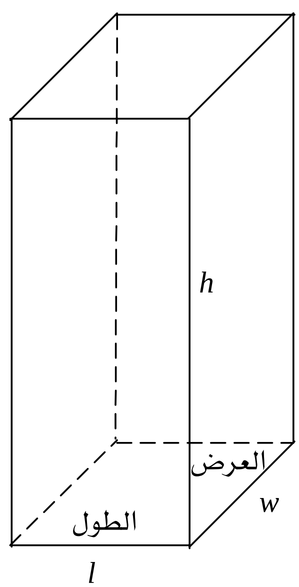
٢. الهندسة الفراغية

تعريفات

- الأشكال المجسمة: وهي الأشكال التي لها ثلاثة أبعاد وهي الطول والعرض والارتفاع.
- المساحة الجانبية للجسم: و هي مجموع مساحات الأوجه الجانبية لكل جسم أو مساحة السطح الجانبي للجسم.
- المساحة السطحية (الكلية) للجسم: هي عبارة عن المساحة الجانبية للجسم مضافا إليها مساحة قاعدتي الجسم إذا كان له قاعدتان أو مساحة قاعدة الجسم إذا كان له قاعدة واحدة مثل المخروط و الهرم.
- حجم الجسم: بصفة عامة حجم أي جسم هو مقدار ما يشغله هذا الجسم من الفراغ.

١,٢. متوازي المستطيلات

هو جسم كل أوجهه مستطيلات و كل وجهين متقابلين منه متطابقان، وإحدى هذين الوجهين المتقابلين يسميان بقاعدتي متوازي المستطيلات.



وللمتوازي المستطيلات أبعاد ثلاثة: الطول l، والعرض w والارتفاع h.

- **المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات:**

$$A = 2(l \times w + l \times h + w \times h)$$

- **حجم متوازي المستطيلات** $V = l \times w \times h$

مثال ١٥: متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي $7cm, 9cm, 11cm$.

احسب مساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المعطيات $w = 7, l = 9, \ h = 11$

المساحة الكلية :

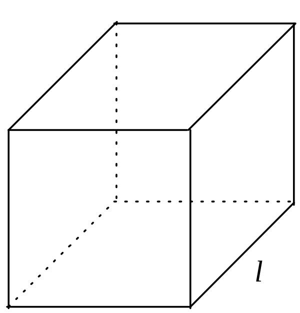
$$A = 2(l \times w + l \times h + w \times h) = 2(9 \times 7 + 9 \times 11 + 7 \times 11) = 2(63 + 99 + 77) = 478\,cm^2$$

الحجم:

$$V = l \times w \times h = 9 \times 7 \times 11 = 693\,cm^3$$

٢,٢. المكعب

هو جسم له ستة أوجه متطابقة، كل وجه منها عبارة عن مربع وكل أحرفه الجانبية متساوية وأي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب.



إذا كان طول حرف المكعب (ضلعه) l فإن

- **مساحته الجانبية** $A_1 = 4l^2$
- **مساحته السطحية** $A_2 = 6l^2$

حجمه : $V = l^3$

مثال ١٦: وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7cm$. احسب كلا من مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للوعاء: $A_1 = 4l^2 = 4(7)^2 = 196\,cm^2$

المساحة السطحية للوعاء: $A_2 = 6l^2 = 6(7)^2 = 294\,cm^2$

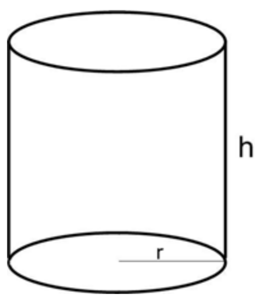
حجم الوعاء: $V = l^3 = 7^3 = 343\,cm^3$

٣,٢. الإسطوانة

و هي جسم له سطح منحني مغلق وقاعدتها عبارة عن دائرتين متطابقتين و متوازيتين.

و من الممكن الحصول على شكل الإسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الإسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الإسطوانة.



- **المساحة الكلية للإسطوانة**

المساحة الكلية للإسطوانة التي نصف قطرها r و ارتفاعها h هي:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + h)$$

- **حجم الإسطوانة**

حجم الإسطوانة التي نصف قطرها r هو: $v = \pi r^2 h$

مثال ١٧: اسطوانة نصف قطر قاعدتها $9cm$ و ارتفاعها $11cm$. أوجد كلا من مساحتها الكلية و حجمها.

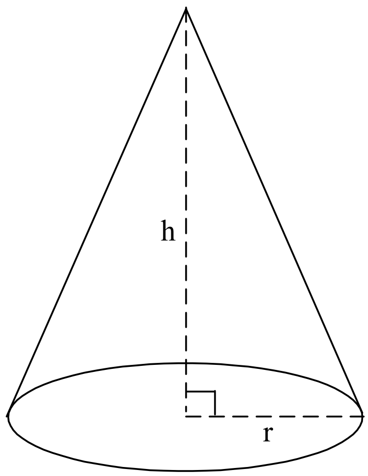
الحل:

المساحة الكلية للاسطوانة: $A = 2\pi(r^2 + h) = 2 \times 3.14 \times \left((9)^2 + 11\right) = 6.28 \times 92 = 577.76\,cm^2$

حجم الإسطوانة: $v = \pi r^2 h = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74\,cm^3$

٤,٢. المخروط

وهو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r ، ورأس بعده العمودي عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط.



- **المساحة الجانبية للمخروط**

المساحة الجانبية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هي:

$$A_l = \frac{2}{3}\pi rh$$

- **المساحة الكلية للمخروط**

المساحة الكلية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هي:

$$A_T = \frac{2}{3}\pi rh + \pi r^2$$

- **حجم المخروط:**

حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h يعطى بالقاعدة :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مثال ١٨: مخروط دائري قائم قطر قاعدته $r = 14cm$ وطول ارتفاعه $h = 11cm$ احسب مساحته الجانبية والكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للمخروط: $A_l = \frac{2}{3}\pi rh = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 14 \times 11 = 322.38cm^2$

المساحة الكلية للمخروط:

$$A_T = \frac{2}{3}\pi rh + \pi r^2 = \pi r\left(\frac{2}{3}h + r\right) = 3.14 \times 14 \times \left(\frac{2}{3} \times 11 + 14\right) = 43.96 \times 21.34 = 938.11cm^2$$

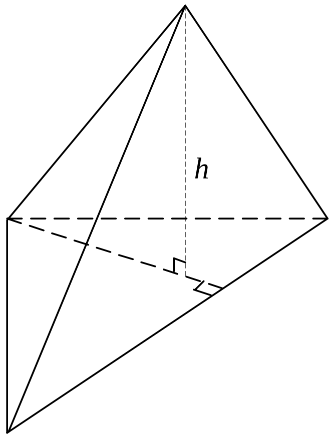
حجم المخروط: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (14)^2 \times 11 = 2256.61cm^3$

٥,٢. الهرم

الهرم هو جسم كل أوجهه الجانبية عبارة عن مثلثات مشتركة في رأس واحد وله قاعدة وحيدة ويسمى الهرم ثلاثيا إذا كانت قاعدته مثلث أو هرم رباعيا إذا كانت قاعدته عبارة عن شكل رباعي أو هرم خماسيا إذا كانت قاعدته خماسية الشكل وهكذا.....

ويكون الهرم منتظما إذا كانت جميع أوجهه الجانبية والقاعدة مثلثات متطابقة.

ارتفاع الهرم هو العمود النازل من رأس الهرم على قاعدته



- **المساحة الكلية للهرم**

المساحة الكلية للهرم الذي طول ضلع قاعدته l وارتفاعه h هو:

$$A = l^2 + 2lh$$

- **حجم الهرم**

حجم الهرم الذي طول ضلع قاعدته l وارتفاعه h هو:

$$V = \frac{1}{3} l^2 h$$

مثال ١٩: هرم رباعي طول ارتفاعه $15cm$ وقاعدته مربع طول ضلعه $7cm$. احسب مساحة قاعدته وحجمه.

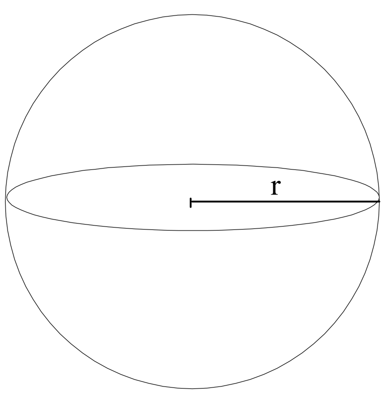
الحل:

مساحة قاعدة الهرم تساوي مساحة المربع: $A_b = 7 \times 7 = 49 cm^2$

حجم الهرم: $V = \frac{1}{3} l^2 h = \frac{1}{3} \times (7)^2 \times 15 = 245 cm^3$

- **٦,٢. الكرة**

هي جسم ذات سطح منحني مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبتعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة داخل الكرة وتسمى هذه النقطة بمركز الكرة.



- **المساحة السطحية للكرة**

المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي: $A = 4\pi r$

- **حجم الكرة**

حجم الكرة التي نصف قطرها r هو: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

مثال ٢٠: كرة نصف قطرها $17cm$. احسب كلا من حجمها ومساحتها السطحية.

الحل:

المساحة السطحية للكرة: $A = 4\pi r = 4 \times 3.14 \times 17 = 213.52 cm^2$

حجم الكرة: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (17)^3 = 20569.09 cm^3$

تمارين

١) بناء على شكل متوازي المستطيلات، طوله $17m$، وعرضه $13m$، وارتفاعه $8m$. ما مساحة قاعدة هذا البناء؟ وما هو حجمه؟

٢) كرة حديدية، حجمها $850cm^3$، رميناها في وعاء مملوء بالماء، فأزاحت كمية من الماء، جمعناها في إناء بشكل متوازي المستطيلات، طول قاعدته $13cm$، وعرضها $11cm$. إلى أي علو يرتفع الماء في هذا الإناء؟

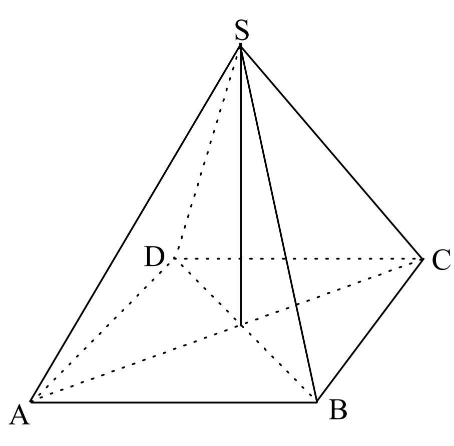
٣) نريد صنع علبة من صفيحة معدنية الشكل، طولها $84cm$ وعرضها $25cm$، عند كل زاوية قصصنا مربعا، طول ضلعه $5cm$، ثم طوينا الجوانب، ولحمناها. كم سعة العلبة الحاصلة؟

٤) وعاء على شكل مكعب طول ضلعه $19cm$ وضع به ماء إلى ارتفاع $9cm$ ثم ألقي به حجر فزاد ارتفاع الماء إلى $13cm$. أوجد حجم الحجر.

٥) علبة من الصابون على شكل مكعب طول ضلعه $27cm$. كم علبة من الصابون يمكن وضعها في صندوق مكعب الشكل طول ضلعه $13m$ إذا علمت أن $\frac{2}{17}$ الحجم مخصصة للتوضيب؟

٦) شكل هندسي على شكل هرم حجمه $360m^2$ وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $12m$. أوجد طول ارتفاعه .

٧) يمثل المستطيل $ABCD$ قاعدة الهرم $SABCD$ رأسه S. والتكن النقطة H مركز المستطيل والقطعة المستقيمة SH عمودية على مستوى القاعدة. احسب
حجم هذا الهرم إذا علمت أن
$AB = 6.4cm,\ BC = 4.8cm,\ SH = 7.5cm$

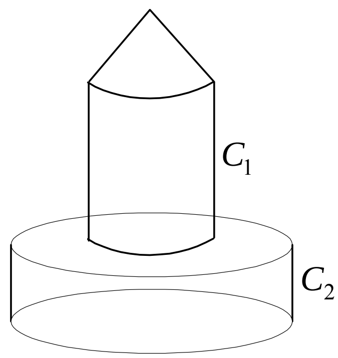


٨) هرم ومخروط لهما نفس الارتفاع h ونفس الحجم V،
إذا كان نصف قطر قاعدة المخروط $17cm$ احسب طول ضلع قاعدة المخروط.

٩) احسب حجم المخروط إذا كان نصف قطر قاعدته يساوي $13cm$ وطول ارتفاعه يساوي ضعف نصف قطر قاعدته.

١٠) كرة واسطوانة لهما نفس الحجم. إذا كان نصف قطر الكرة يساوي $7cm$ أوجد نصف قطر الإسطوانة إذا كان طول ارتفاعها يساوي $12cm$.

١١) قطعة معدنية مكونة من إسطوانتين C_1, C_2 فوقهما مخروط. إذا كان نصف قطر الإسطوانة C_2 ضعف نصف القطر C_1 والمخروط له نفس الارتفاع h ونفس نصف قطر الإسطوانة C_1. نسمي V_1 حجم الإسطوانة C_1 و V_2 حجم الإسطوانة C_2 و V_3 حجم المخروط. احسب طول ارتفاع الإسطوانة C_2 بدلالة h إذا علمت أن $V_2 = V_1 + V_3$.



الوحدات الهندسية

١،٣. نظام الوحدات العالمي للقياس:

إن وحدات القياس هي التي تبني هيكل الفيزياء و بها تكتب المعادلات والقوانين الفيزيائية، وتنقسم هذه الوحدات إلى وحدات أساسية ووحدات مشتقه ولها في الغالب ثلاثة أنظمة مبنية على وحدات الكميات الأساسية

a -النظام الفرنسي المطلق:

متر -كيلو غرام -ثانية (MKSsystem)

b - النظام الفرنسي المطلق:

سنتيمتر–جرام – ثانية (CGS system)

c -النظام البريطاني:

قدم -باوند – ثانية (FPS system)

٢،٣. الوحدات الأساسية للقياس:

تتكون الوحدات الأساسية من ست وحدات يشترط فيها الدقة و الثبات و هي :

-المتر Meter -الأمبير Ampere

- الكيلو غرام Kilogram - الكلفن Kelvin

- الثانية Second -الشمعة Candela

ويبين الجدول التالي الوحدات الأساسية ورموزها وأبعدها .

الكمية Quantity		الرمز Symbol	الوحدة Unit	البعد Dimensions
Length	الطول	L	Meter (m)	L
Area	المساحة	A	m^2	L^2
Volume	الحجم	V	m^3	L^3
Speed	السرعة	v	m/s	L/T
Acceleration	التسارع	a	m/s^2	L/T^2
Mass	الكتلة	m,M	Kilogram (Kg)	M
Density	الكثافة	ρ	kg/m^3	M/L^3
time	الزمن	t	Second (S)	t
Luminous Dentensity	شدة الإضاءة	-	Candela (od)	-
temperature	درجة الحرارة	T	Degree Kelvin $({}^oK)$	T
Force	القوة	F	N	ML/T^2

- - - - - - - - - - - - - -١. المتر meter: وحدة لقياس الأطوال و قد تم الإتفاق دوليا على اختيار طول موجه الضوء البرتقالي المنبعث من ذرات الكر يبتون -٨٦ (نتيجة التفريغ الكهربائي) أساسا للمقاييس الطولية ، و يعرف المتر الدولي العياري بأنه يساوي 1650763.73 مرة قدر طول الموجة.

٢. الكيلو غرام kilogram : هو وحدة لقياس الكتلة ويمثل بإسطوانة من سبيكة مركبة من 90% من البلاتين ، 10% من الإيريديوم محفوظة بالمكتب الدولي للموازين والمقاييس بباريس وقطر هذه الإسطوانه وطولها متساويان ومقدار كل منهما يقرب من $39mm$.

٣. الثانية Second: و هي وحدة لقياس الزمن و تساوي $\frac{1}{31556925.975}$ من الزمن الذي استغرقته السنة الاستوائية عام ١٩٠٠ و تعرف السنة الاستوائية بأنها الفترة الزمنية بين مرور الشمس مرتين متعاقبتين في نفس الاتجاه بالمستوى الاستوائي للأرض.

٤. الكلفن Kelvin: و هي وحدة لقياس درجة الحرارة المطلقة و تساوي $\frac{1}{273.16}$ من درجة الحرارة المطلقة.

٣,٣. تحويل الوحدات

كثيرا ما يحدث أن نريد تحويل كمية معبراً عنها بمجموعة معينة من الوحدات إلى مجموعة أخرى من الوحدات. ومن الأمثلة النموجية، قد نود معرفة عدد الكيلومترات التي تكافىء $20mi$. ولإجراء مثل هذا التحويل نستخدم عوامل التحويل. ولنحاول معرفة ما هو عامل التحويل هذا .

نعرف، على سبيل المثال ، أن

$$100cm = 1m$$

وبالقسمة على $100cm$ نجد أن

$$1 = \frac{1m}{100cm} = 0.010m/cm$$

هذا هو عامل التحويل بين الأمتار والسنتيمترات. لاحظ أن عامل التحويل يساوي الوحدة. وعندما نضرب أية كمية في عامل التحويل فكأنما ضربناها في الوحدة أي أن قيمة هذه الكمية لن تتغير. وسنقوم الآن بعرض عدد من الأمثلة التي يستخدم فيها عامل التحويل.

١ -ما هو عدد الأمتار الموجودة في $30mi$؟ يمكننا الحصول على عامل التحويل المناسب من المعادلة $1.600km = 1mi$ ولذا فهو يساوي $1.60\,km/mi$.وحيث أن عامل التحويل يساوي الوحدة فإننا نستطيع أن نضرب به أو نقسم عليه دون أن تتغير قيمة الكمية. ومن ثم،

$$30mi = (30mi)(1.60\frac{km}{mi}) = 48km$$

٢ -ما عدد الساعات التي تقع في $200,000s$؟ (نعلم أن $1h = 60\min$ وأن $60s = 1\min$ أي أن

$$200.000s = (200.000s)(\frac{1\min}{60s}) = \frac{20.000}{6}\min$$
$$= (\frac{20.000}{6}\min)(\frac{1h}{60\min}) = 55.6h$$

٣ - حول القيمة $30\ in$ إلى cm والقيمة $5cm$ إلى in

لدينا $30in = (30in)(2.54\frac{cm}{in}) = 76.2cm$

و $5cm = (5cm)(0.3937\frac{in}{cm}) = 1.97in$

نتطرق في ما يلي لعوامل التحويل للوحدات الأساسية

١,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الزوايا

	°	/	//	RADIAN	Rev
1degree =	1	60	3600	1.745×10^{-2}	2.778×10^{-3}
1minute =	1.667×10^{-2}	1	60	2.909×10^{-4}	4.630×10^{-5}
1second =	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	4.848×10^{-6}	7.716×10^{-7}
1RADIAN =	57.30	3438	2.063×10^{5}	1	0.1592
1revolution =	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}	6.283	1

٢,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الطول

	cm	Meter	Km	In.	Ft	Mi
1centimeter =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1Meter =	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1Kilometer=	10^{5}	1000	1	3.937×10^{4}	3281	0.6214
1inch =	2.540	$2.540\times10^{-}$	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1foot =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1mile =	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

٣,٣,٣. عوامل تحويل وحدات المساحة

	$METER^2$	cm^2	ft^2	$in.^2$
1SQUARE METER =	1	10^{4}	10.76	1550
1square centimeter =	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1square foot =	9.290×10^{-2}	929.0	1	144
1square inch =	6.452×10^{-4}	6.452	6.944×10^{-3}	1

٤,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الحجم

	$Meter^3$	cm^3	L	ft^3	$in.^3$
1CUBIC METER =	1	10^6	1000	35.31	6.102×10^4
1cubic centimeter =	10^{-6}	1	1.000×10^{-3}	3.531×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1liter =	1.000×10^{-3}	1000	1	3.531×10^{-2}	61.02
1cubic foot =	2.832×10^{-2}	2.832×10^4	28.32	1	1728
1cubic inch =	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

٥,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الكتلة

	g	Kilogram	u	oz	lb	ton
1gram	1	0.001	$6.022\times10^{[illegible]}$	3.527×10^{-2}	2.205×10^{-3}	1.102×10^{-6}
1Kilo-gram	1000	1	$6.022\times10^{[illegible]}$	35.27	2.205	1.102×10^{-3}
1u	1.661×10^{-24}	1.661×10^{-27}	1	5.857×10^{-26}	3.662×10^{-27}	1.830×10^{-30} 1
1ounce	28.35	2.835×10^{-2}	1.718×10^{2}	1	6.250×10^{-2}	3.125×10^{-5}
1pound	453.6	0.4536	$2.732\times10^{[illegible]}$	16	1	0.0005
1ton	9.072×10^5	907.2	$5.463\times10^{[illegible]}$	3.2×10^4	2000	1

٦,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الزمن

	y	d	h	min	SECOND
1year	1	365.25	8.766×10^3	5.259×10^5	3.156×10^7
1day	2.738×10^{-3}	1	24	1440	8.640×10^4
1hour	1.141×10^{-4}	4.167×10^{-2}	1	60	3600
1minute	1.901×10^{-6}	6.944×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	60
1Second	3.169×10^{-8}	1.157×10^{-5}	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1

٧,٣,٣. عوامل تحويل وحدات الضغط

	atm	dyne/cm^2	cm Hg	PASCAL	lb/in.^{2}	lb/ft^2
1atmosphere	1	1.013×10^6	76	1.013×10	14.70	2116
1dyne per cm^2	9.869×10^{-7}	1	7.501×10^{-5}	0.1	$1.405\times10^{-}$	2.089×10^{-3}
1centimeter of mercury[a] at 0^0C	1.316×10^{-2}	1.333×10^4	1	1333	0.1934	27.85
1PASCAL	9.869×10^{-6}	10	7.501×10^{-4}	1	$1.450\times10^{-}$	2.089×10^{-2}
1pound per in^2	6.805×10^{-2}	6.895×10^4	5.171	$6.895\times1($	1	144
1pound per ft^2	4.725×10^{-4}	478.8	3.591×10^{-2}	47.88	$6.944\times10^{-}$	1

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

مركز الثقل وعزم القصور

مركز الثقل وعزم القصور

٧

الجدارة: الإلمام بمبادئ بمركز الثقل وعزم القصور للأشكال المختلفة

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على:

- حساب إحداثيات مركز الأشكال الأولية والمركبة
- حساب عزم القصور للمساحات والمنحنيات الأولية
- حساب عزم القصور للمساحات والمنحنيات المركبة

الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات

مركز الثقل وعزم القصور

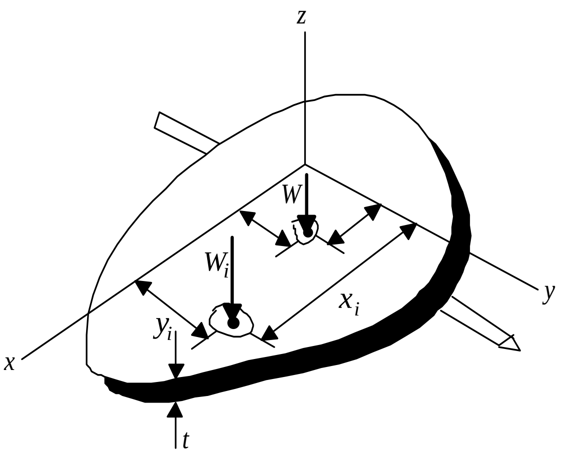
١. مركز الثقل ومركز الكتلة

١,١. تعريف

مركز ثقل الجسم هو تلك النقطة الواحدة التي يمكننا اعتبار أن شد الجاذبية والوزن يؤثر عندها عند دراسة سلوك الجسم.

ويعرف مركز الثقل بأنه المركز المتوسط للحجم عندما تكون المادة التي يتضمنها الجسم متجانسة

لنفرض أن الصفيحة قد قسمت إلى n من العناصر وزنها W_i حيث $i=1,2,3,...,n$ وإحداثياتها x_i, y_i .



القوة المحصلة لهذه المجموعة من القوى هي وزن الصحيفة و يعطى كما يلي:

$$W=\sum_i W_i$$

يعين موقع خط عمل القوة المحصلة وزن الصحيفة بالإحداثيات x_c, y_c حيث

$$x_c=\frac{\sum_i x_iW_i}{\sum_i W_i}=\frac{x_1W_1+x_2W_2+x_3W_3+...+x_3W_3}{W_1+W_2+W_3+...+W_n}$$

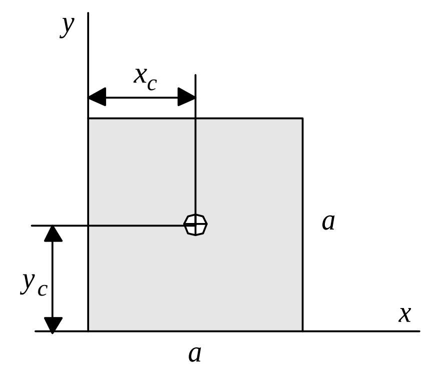
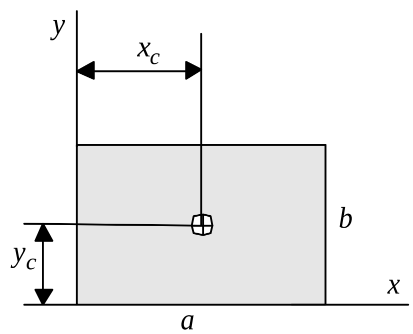
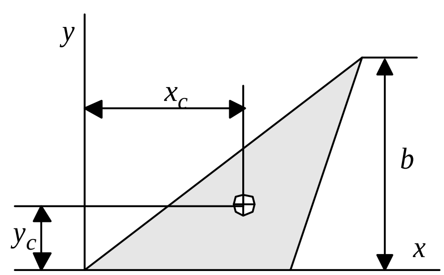
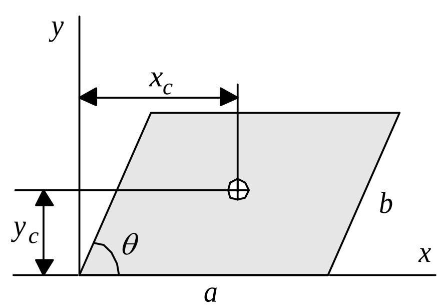
$$y_c=\frac{\sum_i y_iW_i}{\sum_i W_i}=\frac{y_1W_1+y_2W_2+y_3W_3+...+y_3W_3}{W_1+W_2+W_3+...+W_n}$$

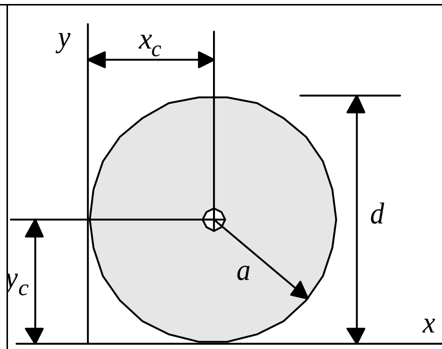
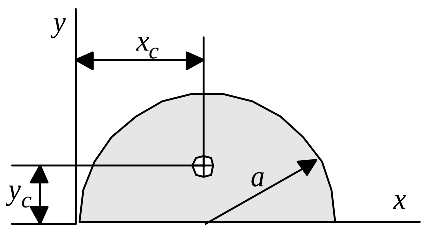
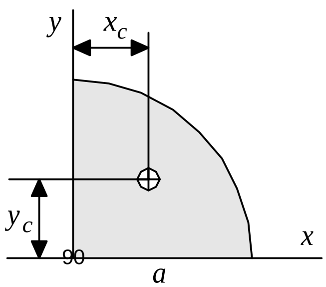
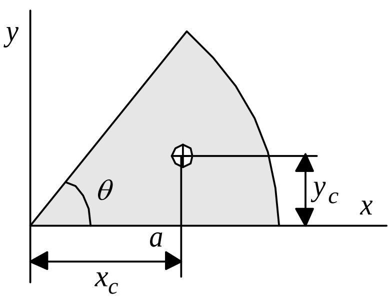
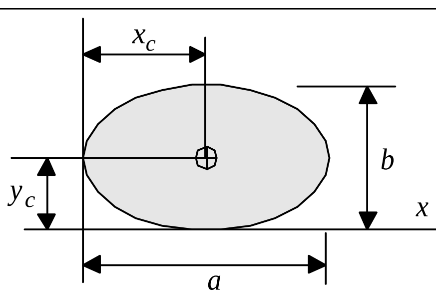
لنرمز لمساحة السطح المستوية للصحيفة بالرمز A وللعناصر A_i ، سمك الصحيفة هو t و γ الوزن النوعي لمادة الصحيفة ومنه يمكن كتابة المعادلات السابقة كما يلي:

$$x_c=\frac{\sum_i x_i(A_it\gamma)}{\sum_i (A_it\gamma)}=\frac{t\gamma\sum_i x_i(A_it\gamma)}{t\gamma A}=\frac{\sum_i x_i(A_it\gamma)}{A}=\frac{x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+...+x_3A_3}{A_1+A_2+A_3+...+A_n}$$

$$Y_G=\frac{\sum_i y_i(A_it\gamma)}{\sum_i (A_it\gamma)}=\frac{t\gamma\sum_i y_i(A_it\gamma)}{t\gamma A}=\frac{\sum_i y_i(A_it\gamma)}{A}=\frac{y_1A_1+y_2A_2+y_3A_3+...+y_3A_3}{A_1+A_2+A_3+...+A_n}$$

تعرف النقطة على المساحة المستوية A بالإحداثيات x_c , y_c بأنها المركز المتوسط لهذه المساحة والجدول التالي يبين إحداثيات مركز الثقل لبعض الأجسام المستوية الأولية.

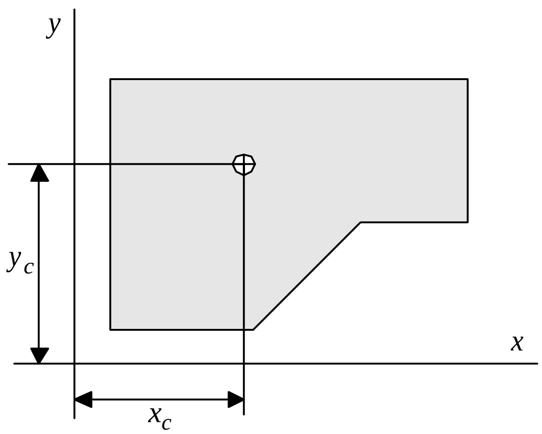
الحالة	الشكل		A	x_c	y_c
١	مربع		a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
٢	مستطيل		ab	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$
٣	مثلث		$\frac{ab}{2}$	-	$\frac{b}{3}$
٤	متوازي الأضلاع		$ab\sin\theta$	$\frac{a+b\cos\theta}{2}$	$\frac{b\sin\theta}{2}$

٥	دائرة		πa^2	$a=\frac{d}{2}$	$a=\frac{d}{2}$
٦	نصف دائرة		$\frac{\pi a^2}{2}$	a	$\frac{4a}{3\pi}$
٧	ربع دائرة		$\frac{\pi a^2}{4}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4a}{3\pi}$
٨	قطاع دائري		$\frac{a^2\theta}{2}$	$\frac{2a\sin\theta}{3\theta}$	$\frac{4a\sin^2 \theta/2}{3\theta}$
٩	قطع ناقص		$\frac{\pi ab}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$

٢. المراكز المتوسطة لمساحات مركبة

في كثير من المسائل يكون من الضروري إيجاد المركز المتوسط لمساحة ليست واحدة من الأشكال البسيطة السابقة وطريقة حل هذا النمط من المسائل هو تقسيم المساحة الأصلية مساحات ذات أشكال أولية بحيث يكون إحداثيات المركز المتوسط لكل منها معلومة وبالتالي يمكن إيجاد المركز المتوسط

المساحات مركبة كما يلي:



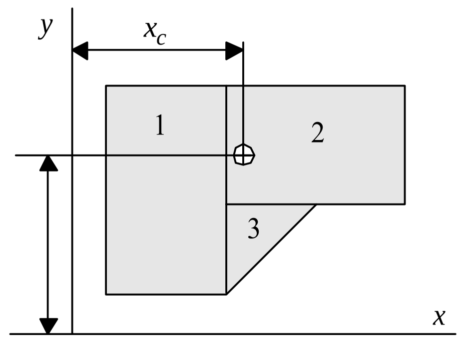
$$x_c = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \ldots + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}$$

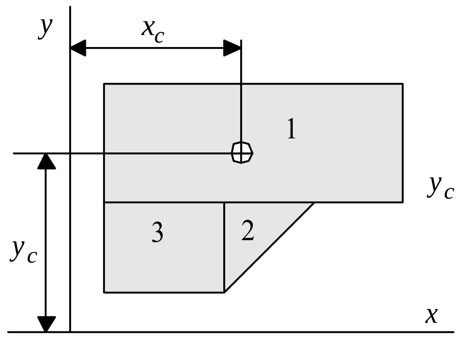
$$y_c = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + \ldots + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ المساحات الأولية التي قسمت إليها المساحة الأصلية، $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

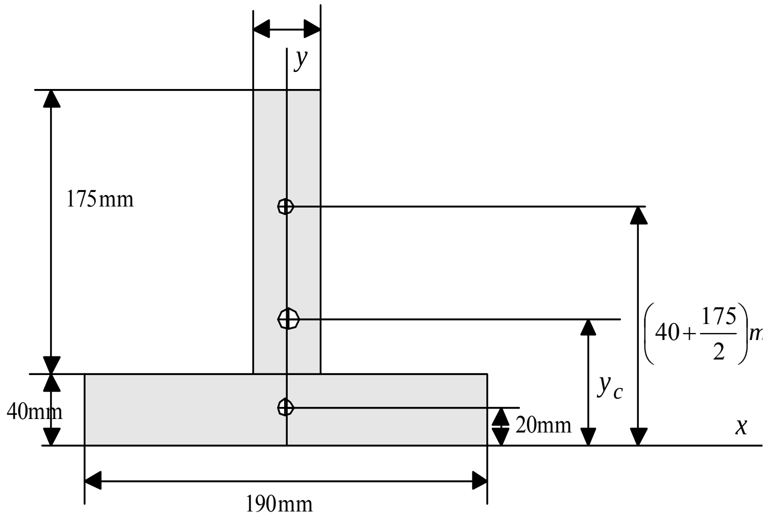
و $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ الإحداثيات المناظرة للمراكز المتوسطة لهذه المساحات الأولية.

يمكن تقسيم المساحة المركبة الأصلية جزئيا إلى مساحات أولية بطرق مختلفة كما هو مبين في الأشكال التالية





مثال ١: تمثل المساحة المبينة في الشكل المقطع المستعرض لعائق. أوجد إحداثيات المركز المتوسط لهذه المساحة.



الحل:

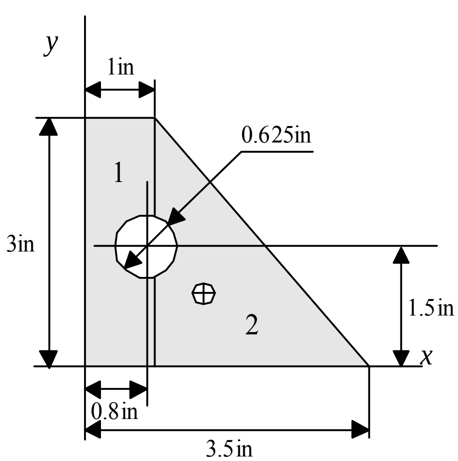
تقسم المساحة المعطاة جزئيا إلى المستطيلين المبينين في الشكل

من اعتبارات التماثل $x_c = 0$

باستخدام المعادلة السابقة نوجد إحداثية المركز المتوسط y_c

$$y_c = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(40+175/2)(40)(175)+20(190)40}{40(175)+190(40)} = 71.5\ mm$$

البيان الاصطلاحي للحل هو إذاً $x_c = 0,\quad y_c = 71.5\ mm$



مثال ٢: أبعاد جزء من آلة على شكل صفيحة رقيقة مبينة في الشكل

١) أوجد إحداثيات المركز المتوسط لهذا الجزء

٢) أوجد إحداثيات المركز المتوسط إذا ثقبت فتحة في هذا الجزء كما هو مبين بالدائرة المتقطعة في الشكل.

الحل:

١) نقسم مساحة الصفيحة إلى المساحتين المبينتين في الشكل

باستخدام المعادلتين السابقتين نوجد إحداثيات المركز المتوسط

$$x_c=\frac{\sum_i x_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{x_1A_1+x_2A_2}{A_1+A_2}=\frac{0.5(1)(3)+[1+0.333(2.5)](0.5)(2.5)(3)}{1(3)+0.5(2.5)(3)}=1.24\ in$$

$$y_c=\frac{\sum_i y_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2}=\frac{1.5(1)(3)+1(0.5)(2.5)(3)}{1(3)+0.5(2.5)(3)}=1.22\ in$$

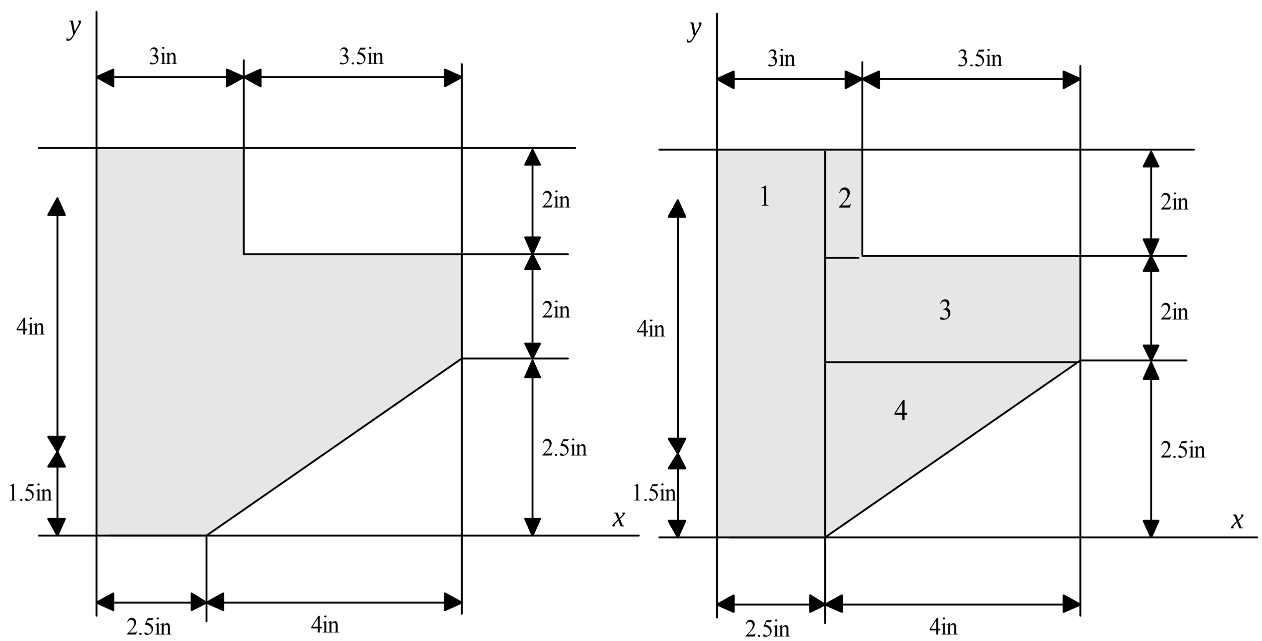
٢) في حالة وجود الثقب في الصفيحة نستخدم المعادلتين السابقتين مرة ثانية مع إضافة الحدود التي تعكس العزم الأول ومساحة الثقب وتكون إحداثيات المركز المتوسط في هذه الحالة كما يلي:

$$x_c=\frac{\sum_i x_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{0.5(1)(3)+[1+0.333(2.5)](0.5)(2.5)(3)-0.8[\pi(0.625)^2/4]}{1(3)+0.5(2.5)(3)-\pi(0.625)^2/4}=1.26in$$

$$y_c=\frac{\sum_i y_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{1.5(1)(3)+1(0.5)(2.5)(3)-1.5[\pi(0.625)^2/4]}{1(3)+0.5(2.5)(3)-\pi(0.625)^2/4}=1.21in$$

ملاحظة: إذا كانت المساحة المركبة شكلا يحتاج إلى وصف عدة مساحات أولية فإنه يمكن تنظيم هذه الحسابات في صورة جدول

مثال٣: أوجد إحداثيات المركز المتوسط للصحيفة المسطحة المبينة في الشكل التالي:



الحل:

نقسم مساحة الصحيفة إلى أربعة عناصر كما هو مبين في الشكل ونستعمل جدول يشمل جميع تفاصيل الحسابات لمساحة معينة أو للمركز المتوسط لمساحة أولية

العنصر	A_i	x_i	$x_i A_i$	y_i	$y_i A_i$
١	$2.5(6.5)=16.3$	$0.5(2.5)=1.25$	20.5	$0.5(6.5)=3.25$	53.0
٢	$0.5(2)=1$	$2.5+0.5(0.5)=2.75$	2.75	$4.5+0.5(2)=5.5$	5.5
٣	$4(2)=8$	$2.5+0.5(4)=4.5$	36.0	$2.5+0.5(2)=3.5$	28
٤	$0.5(2.5)(4)=5$	$2.5+0.333(4)=3.83$	19.2	$0.667(2.5)=1.67$	8.35

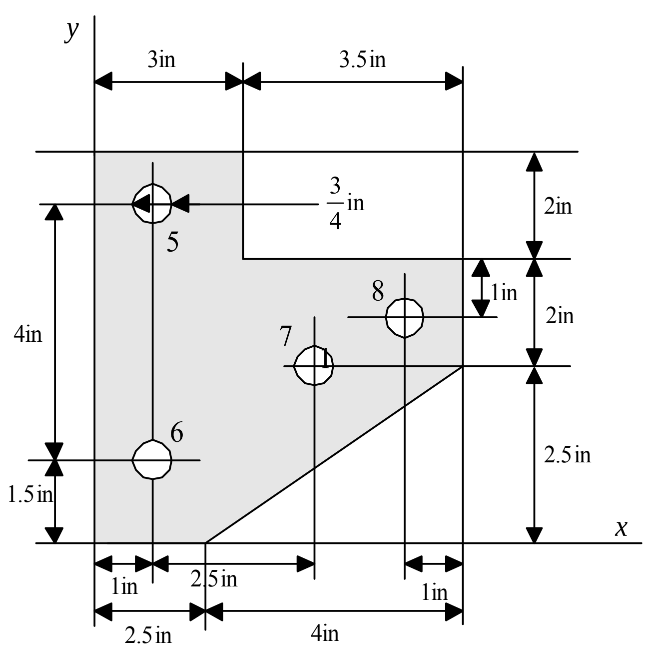
$$A=\sum_i A_i=30.3 \qquad \sum_i x_i A_i=78.4 \qquad \sum_i y_i A_i=94.9$$

$$x_c=\frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}=\frac{78.4}{30.3}=2.59\,in \qquad y_c=\frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}=\frac{94.9}{30.3}=3.13\,in$$

مثال ٤: ثقب الآن أربع فتحات في الصفيحة السابقة. أوجد إحداثيات المركز المتوسط للصفيحة المثقوبة.

الحل:

نقسم مساحة الصحيفة إلى ثمانية عناصر كما هو مبين في الشكل ونستعمل جدول يشمل جميع تفاصيل الحسابات لمساحة معينة أو للمركز المتوسط لمساحة أولية. الصفوف الأربعة هي نفس الصفوف المناظرة في الجدول السابق ونرمز للثقوب على أنها المساحات من ٥ إلى ٨ وتدرج هذه المساحات الدائرية في الجدول ككميات سالبة

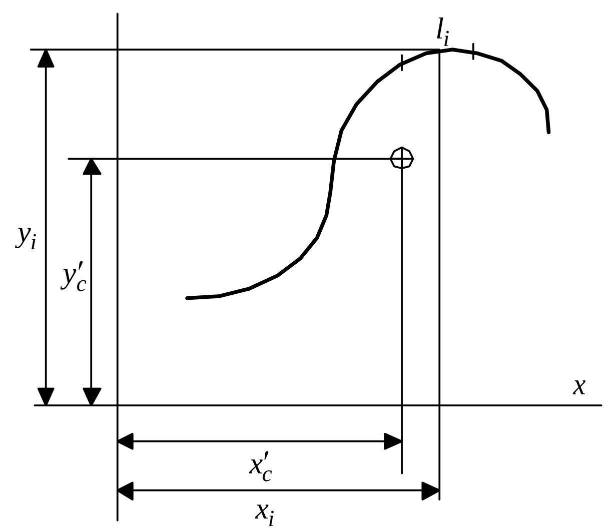


العنصر	A_i	x_i	x_iA_i	y_i	y_iA_i
١	$2.5(6.5)=16.3$	$0.5(2.5)=1.25$	20.5	$0.5(6.5)=3.25$	53.0
٢	$0.5(2)=1$	$2.5+0.5(0.5)=2.75$	2.75	$4.5+0.5(2)=5.5$	5.5
٣	$4(2)=8$	$2.5+0.5(4)=4.5$	36.0	$2.5+0.5(2)=3.5$	28
٤	$0.5(2.5)(4)=5$	$2.5+0.333(4)=3.83$	19.2	$0.667(2.5)=1.67$	8.35
5	$\dfrac{-\pi(0.75)^2}{4}=-0.44$	1	-0.44	$1.5+4=5.5$	-2.42
6	-0.44	1	-0.44	1.5	-0.66
7	-0.44	$1+2.5=3.5$	-1.54	2.5	-1.10
8	-0.44	$1+2.5+2=5.5$	-2.42	$2.5+1=3.5$	-1.54

$$A=\sum_i A_i=28.5 \qquad \sum_i x_iA_i=73.5 \qquad \sum_i y_iA_i=89.1$$

$$x_c=\frac{\sum_i x_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{73.5}{28.5}=2.58\,in \qquad y_c=\frac{\sum_i y_iA_i}{\sum_i A_i}=\frac{89.1}{28.5}=3.13\,in$$

٣. المركز المتوسط لمنحنى مستوى



يبين الشكل المقابل خطا منحنيا طوله l يقع في مستوى الورقة. ليس لهذا المنحنى المستوي أي سمك ويمكن أن نتصور أنه مصنوع من سلك رفيع.

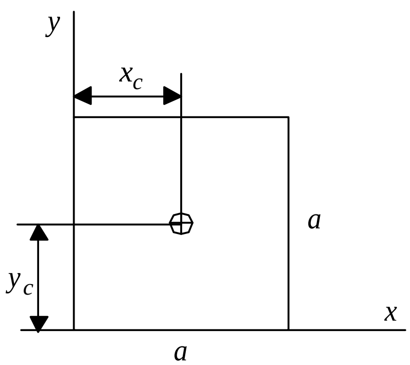
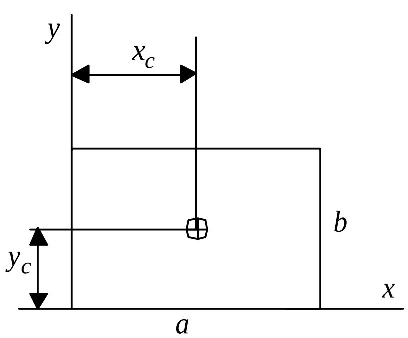
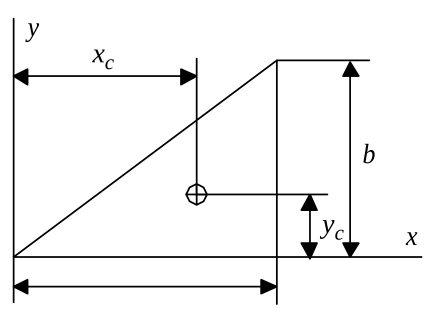
يمتلك المنحنى المستوي مركزا متوسطا وهي خاصية متأصلة في شكل المنحني. يمكن تقسيم المنحنى جزئيا إلى عناصر قصيرة طولها l_i كما هو مبين في الشكل. يقع المركز المتوسط لكل من هذه العناصر عند منتصف العنصر و إحداثياته هما x_i, y_i وتعرف إحداثيات المركز المتوسط x_c, y_c للمنحنى المستوي كما يلي:

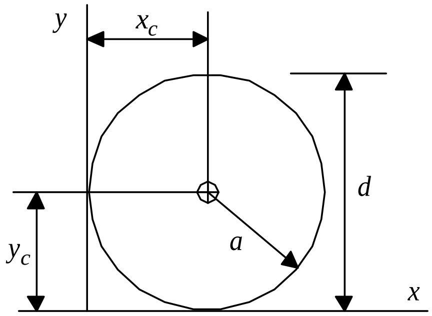
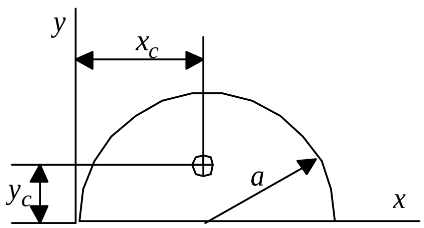
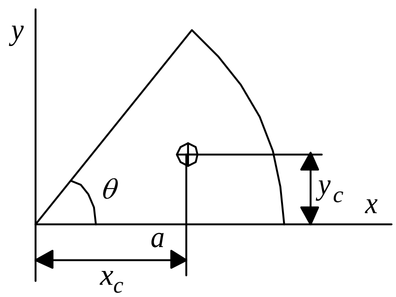
$$x_c=\frac{\sum_i x_il_i}{\sum_i l_i}=\frac{x_1l_1+x_2l_2+x_3l_3+\ldots+x_3l_3}{l_1+l_2+l_3+\ldots+l_n}\ ,\quad y_c=\frac{\sum_i y_il_i}{\sum_i l_i}=\frac{y_1l_1+y_2l_2+y_3l_3+\ldots+y_3l_3}{l_1+l_2+l_3+\ldots+l_n}$$

ملاحظة :

يلاحظ أن المركز المتوسط لمنحنى مستوي لا يقع بالضرورة على المنحنى. وكما في حالة المساحات المستوية ، إذا كان لمنحنى مستوى تماثل فإن المركز المتوسط يجب أن يقع على هذا المحور وإذا كان لمنحنى مستوى محورا تماثل فإن المركز المتوسط يقع عند تقاطع هذين المحور .

يبين الجدول التالي إحداثيات المركز المتوسط لعدة أشكال أساسية من المنحنيات المستوية

الحالة	الشكل	A	x_c	y_c
١	مربع 	a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$
٢	مستطيل 	$2(a+b)$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$
٣	مثلث 	$a+b+c$	$\frac{a(a+2b+c)}{2(a+b+c)}$	$\frac{b(b+c)}{2(a+b+c)}$

٤	دائرة		$2\pi a$	a	a
٥	نصف دائرة		πa	a	$\frac{2a}{\pi}$
٦	قوس دائري		$a\theta$	$\frac{a\sin\theta}{\theta}$	$\frac{2a\sin^2\theta/2}{\theta}$

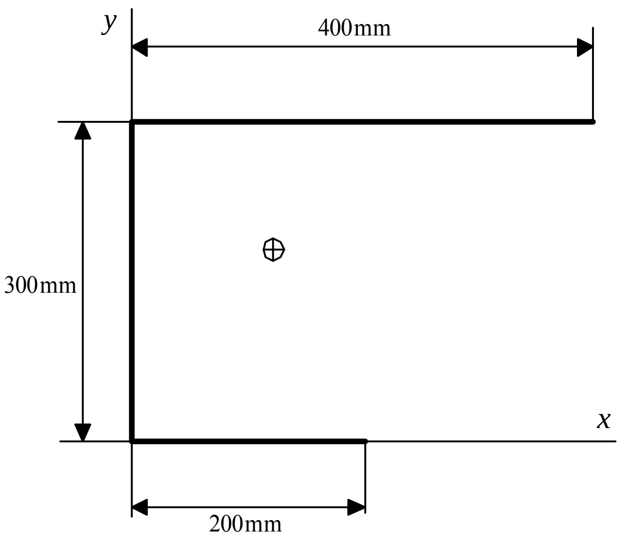
٤. المركز المتوسط لمنحنى مستوي مركب

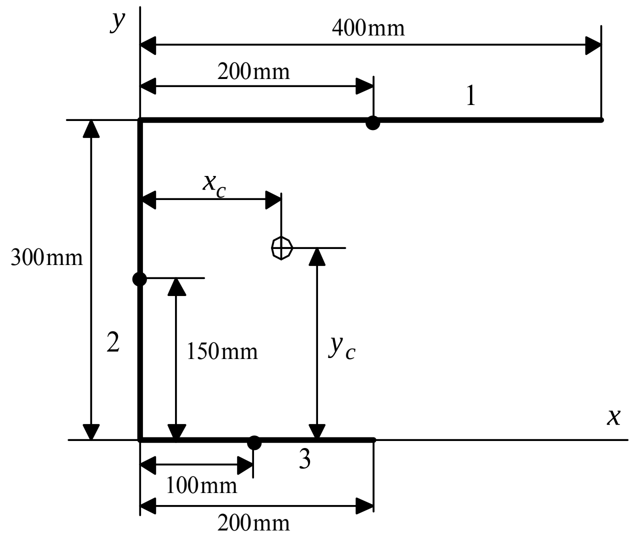
يمكن إيجاد المركز المتوسط لمنحنى مستوى مركب كما يلي:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i l_i}{\sum_i l_i} = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3 + \ldots + x_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n} \quad , \quad y_c = \frac{\sum_i y_i l_i}{\sum_i l_i} = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3 + \ldots + y_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}$$

حيث $l_1, l_2, l_3, \ldots., l_n$ الأطوال الأولية التي قسم إليها المنحنى المركب، $x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n$ و $y_1, y_2, y_3, \ldots., y_n$ الإحداثيات المناظرة للمراكز المتوسطة لهذه الأطوال

مثال ٥: يبين الشكل التالي خط منتصف لنموذج لحام على صفيحة مسطحة. أوجد موقع المركز المتوسط لهذا الخط المنتصف.





الحل:

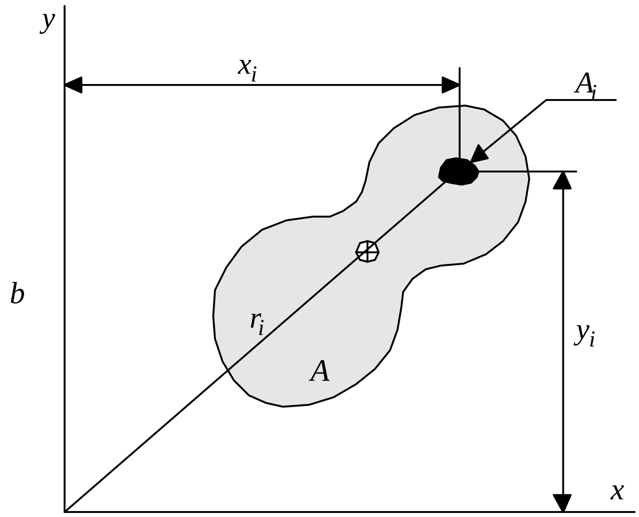
يقسم الشكل الأصلي إلى ثلاثة عناصر خطية مستقيمة ١ و ٢ و٣ كما هو مبين في الشكل، باستخدام المعادلتين السابقتين يكون لدينا

$$x_c = \frac{\sum_i x_i l_i}{\sum_i l_i} = \frac{400(200)+300(0)+200(100)}{400+300+200} = 111mm$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i l_i}{\sum_i l_i} = \frac{400(300)+300(150)+200(0)}{400+300+200} = 183mm$$

٥. عزم القصور للمساحات المستوية

يبين الشكل التالي مساحة مستوية A موضوعة بالنسبة إلى مجموعة محوري الإحداثيات xy ، تقسم المساحة جزئيا إلى مساحات أولية A_i لها إحداثيات x_i و y_i. خاصية المجموعة المركبة التي تتكون من المساحة وموضع هذه المساحة بالنسبة إلى محوري الإحداثيات تسمى عزم القصور



. يعرف عزم القصور للمساحة A كما يلي:

$$I_x = \sum_i {y_i}^2 A_i, \qquad I_y = \sum_i {x_i}^2 A_i$$

حيث I_x هو عزم القصور للمساحة A حول المحور x و I_y هو عزم القصور للمساحة A حول المحور y

ملاحظات

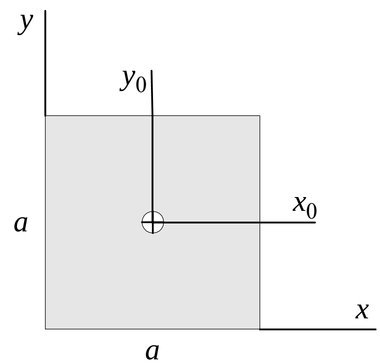
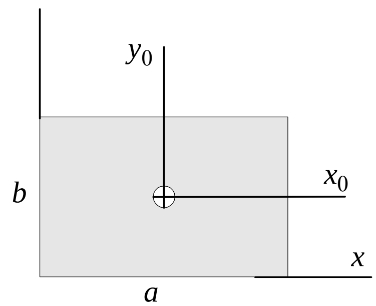
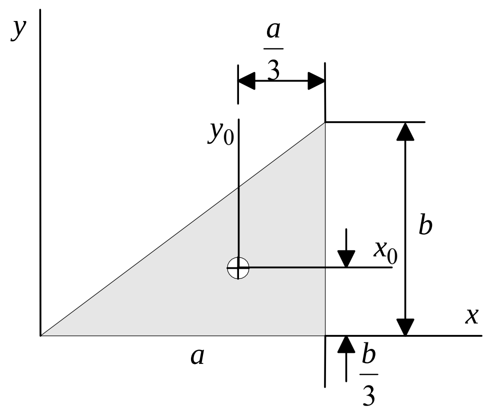
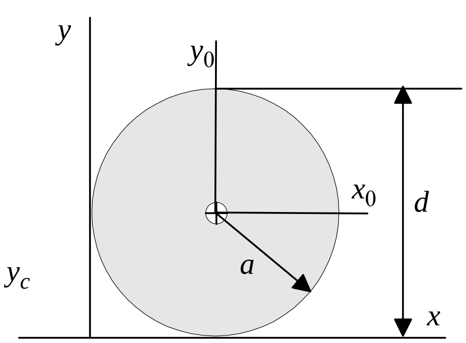
١) نظرا لأن A ، ${x_i}^2$ و ${y_i}^2$ هي حدود موجبة فإن عزم القصور يكون دوما موجب.

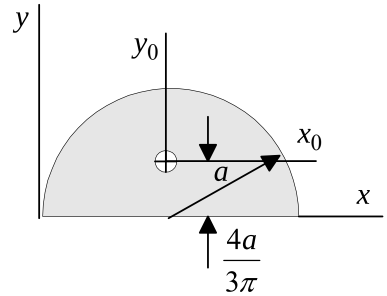
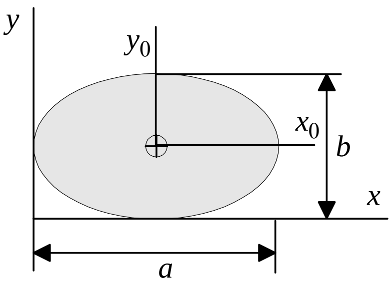
٢) يتضح من المعادلتين السابقتين أن وحدات عزم القصور للمساحة هي طول مرفوع للقوة الرابعة و نعبر عنها بـ $mm^4, cm^4, m^4, \ldots$

٣) بما أن كل عنصر مساحة مضروب في مربع بعده عن محور الاستناد فإن العناصر التي تكون على مسافات أكثر بعدا من هذا المحور يكون لها تأثير أكبر نسبيا على مقدار عزم القصور عن عناصر المساحة التي تكون أقرب إلى هذا المحور.

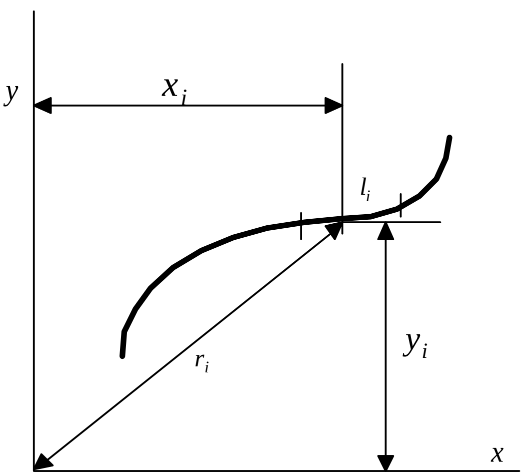
٤) عزم القصور هو مقياس لتوزيع عناصر المساحة داخل مساحة مستوية.

وسنتطرق فيما يلي لحساب عزم القصور لبعض المساحات أولية متعددة

الحالة	الشكل	I_{x_0}	I_{y_0}	I_x	I_y
١		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{a^3}{3}$
٢		$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{3}$	$\frac{ab^3}{3}$
٣		$\frac{ab^3}{36}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{ab^3}{12}$	$\frac{ba^3}{4}$
4		$\frac{\pi a^2}{4}$	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{5\pi a^4}{4}$	$\frac{5\pi a^4}{4}$

5		$a^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$	$\frac{\pi a^4}{8}$	$\frac{\pi a^4}{8}$	$\frac{5\pi a^4}{8}$
6		$\frac{\pi ab^3}{64}$	$\frac{\pi ba^3}{64}$	$\frac{5\pi ab^3}{64}$	$\frac{5\pi ba^3}{64}$

٦. عزم القصور للمنحنيات المستوية



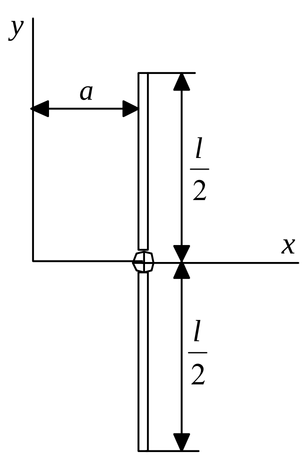
يعرف عزم قصور المنحنى المستوي بالنسبة إلى محوري الإحداثيات بأنهما :

$$I_x=\sum_i y_i^2 l_i, \qquad I_y=\sum_i x_i^2 l_i$$

حيث l_i عناصر الطول للمنحنى

ونلاحظ أن وحدات عزم القصور منحنى مستوي هي طول مرفوع للقوة الثالثة ونعبر عنها بـ

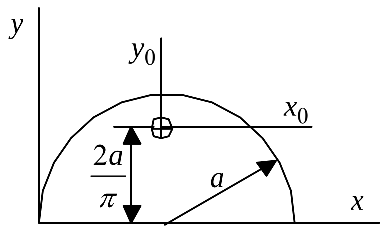
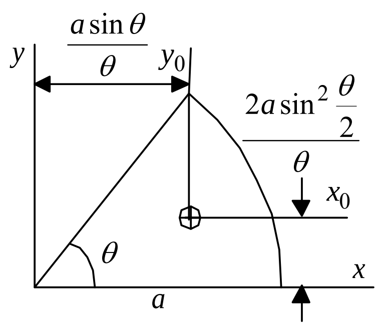
$mm^3, cm^3, m^3,...$



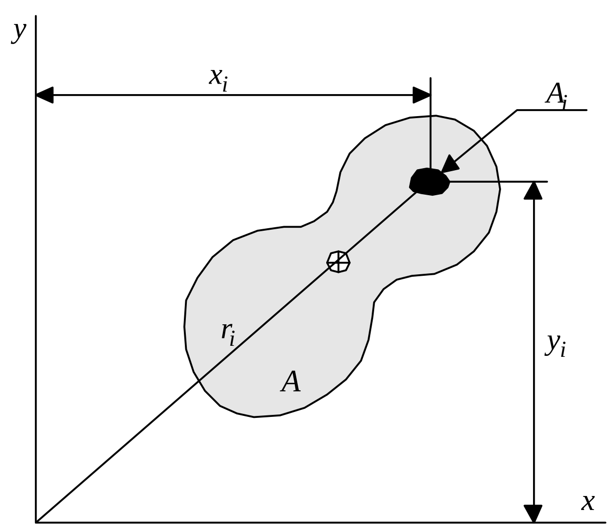
مثال ٦ : عزمي قصور الخط المستقيم المبين في الشكل المقابل حول المحورين x و y هما

$$I_x=\frac{l^3}{12}, \qquad I_y=a^2 l$$

والجدول التالي يبين عزم القصور لبعض المنحنيات الأولية

I_y	I_x	I_{y_0}	I_{x_0}	الشكل	الحالة
$\frac{3\pi a^3}{2}$	$\frac{\pi a^3}{2}$	$\frac{\pi a^3}{2}$	$\frac{a^3}{2\pi}\left(\pi^2-8\right)$		1
$I_y=\frac{a^3}{4}(2\theta+\sin 2\theta)$	$I_x=\frac{a^3}{4}(2\theta-\sin 2\theta)$				2

٧. عزم القصور القطبي للمساحات المستوية



بجمع معادلتي عزم القصور حول المحورين المارين بالمركز المتوسط يكون لدينا:

$$I_x+I_y=\sum_i(x_i^2+y_i^2)A_i$$

من الشكل نرى أن $r_i^2=x_i^2+y_i^2$ ومنه

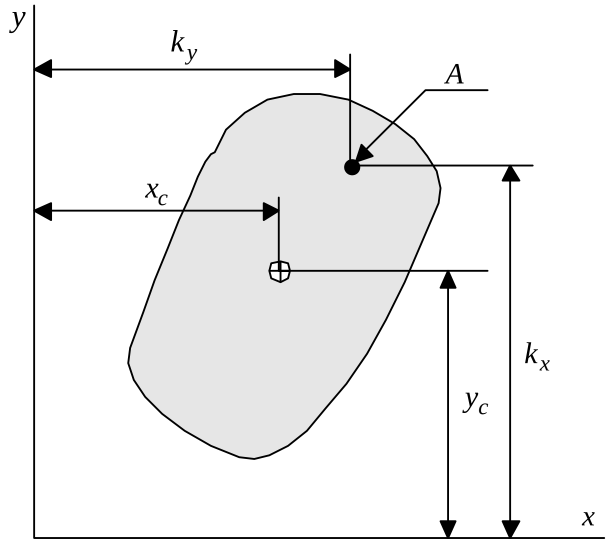
$$J=\sum_i r_i^2 A_i=I_x+I_y$$

محور الاستناد للمقدار J هو محور عمودي على المستوى xy ويؤثر خلال نقطة الأصل لهذه الإحداثيات.

٨. عزم القصور القطبي للمنحنيات المستوية

يعطى عزم القصور القطبي للمنحنى المستوي كما يلي:

$$J = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) l_i = \sum_i r_i^2 l_i = I_x + I_y$$



٩. نصف قطر القصور

لنفرض أن المساحة الكلية قد تركزت في نقطة وحيدة A كما هو مبين في الشكل المقابل ولتكن إحداثيات هذه النقطة k_x و k_y هما نصفا قطر قصور المساحة المستوية بالنسبة إلى المحورين x و y ويعرفان بأنهما الجذر التربيعي لنسبة عزم قصور المساحة

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

ويرمز لنصف قطر القصور الذي يناظر عزم القصور القطبي بالرمز k_p ويعرف كما يلي:

$$k_p = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

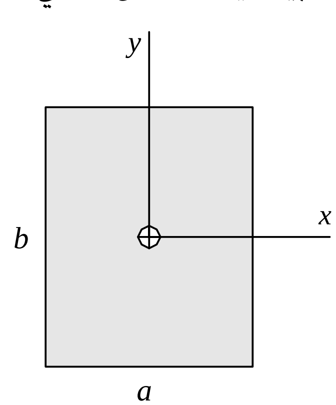
ويكون لدينا $k_p^2 = k_x^2 + k_y^2$

مثال ٧: أوجد أنصاف أقطار القصور k_x ، k_y و k_p للمساحة المستطيلة المبينة في الشكل التالي:

الحل:

لدينا $I_x = \dfrac{ab^3}{12}, \quad I_y = \dfrac{ba^3}{12}, \quad A = ab$

ومنه

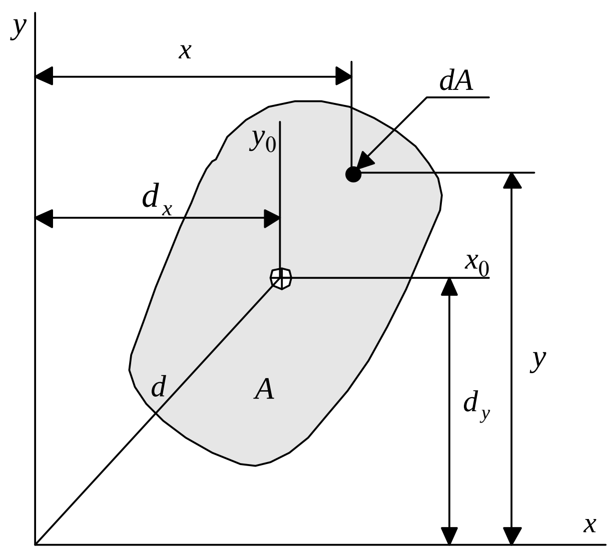


$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{ab^3}{12ab}} = \frac{b}{2\sqrt{3}},$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{ba^3}{12ab}} = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$k_p{}^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2 = \frac{b^2 + a^2}{12} \Rightarrow k_p = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{2\sqrt{3}}$$

١٠. نظرية المحور الموازى ، أو نظرية النقل، لعزوم القصور



يبين الشكل المقابل مساحة مستوية A .

عزم القصور حول المحور x هو

$$I_x = I_{x_0} + Ad_y{}^2$$

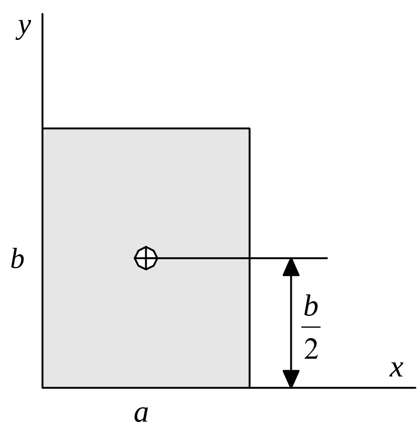
عزم القصور حول المحور y هو

$$I_y = I_{o_y} + Ad_x{}^2$$

حيث $y = d_y + y_0$ و $x = d_x + x_0$

وبالتالي إذا علم عزم القصور حول محور يمر في المركز المتوسط فإنه يمكن إيجاد عزم القصور حول محور موازي بإضافة حاصل ضرب المساحة في مربع المسافة الفاصلة بين هذين المحورين إلى عزم القصور حول المحور الذي يمر بالمركز المتوسط.

مثال ٨: أوجد عزم قصور المساحة المستطيلة في الشكل المقابل بالنسبة إلى المحور x



الحل:

باستخدام المعادلة السابقة في نظرية النقل يكون لدينا :

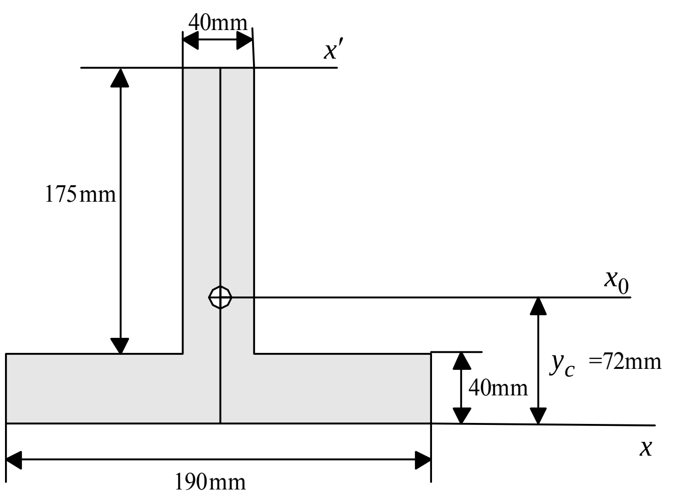
$$I_x = I_{x_o} + Ad_y{}^2 = \frac{ab^3}{12} + ab\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{3}$$

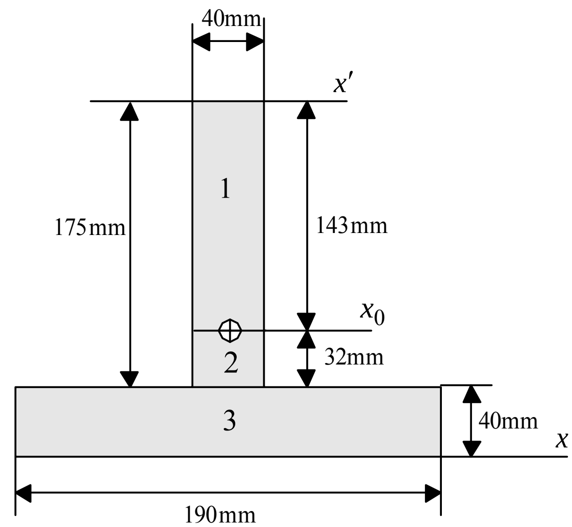
نلاحظ أن عزم القصور حول الحافة أكبر أربع مرات من عزم القصور حول المحور الذي يمر بالمركز المتوسط.

١١. عزم القصور للمساحات والمنحنيات المركبة

في حالة المساحات والمنحنيات المركبة نقسم المساحة أو المنحنى المركب جزئيا إلى أشكال أولية، ونجمع عزوم قصور هذه الأشكال الأولية نحصل على عزم القصور للمساحة أو للمنحنى المركب.

مثال ٩: أوجد عزم قصور للمساحة المبينة في الشكل التالي ، حول المحور x_0 الذي يمر بالمركز المتوسط وحول المحورين x و x' اللذين يقعان على طول الحافتين الخارجتين للمساحة.





الحل:

نقسم المساحة الأصلية جزئيا إلى المستطيلات المبينة في الشكل

لدينا عزم القصور للمساحة ١ حول المحور x_0 هي عزم المستطيل حول حرفه

$$I_{x_0,1} = \frac{ab^3}{3} = \frac{40(143)^3}{3}$$

و عزم القصور للمساحة ٢ حول المحور x_0 هي عزم المستطيل حول حرفه

$$I_{x_0,2} = \frac{ab^3}{3} = \frac{40(32)^3}{3}$$

و نستخدم نظرية المحور الموازي لحساب عزم القصور للمساحة ٣ حول المحور x_0

$$I_{x_0,3} = I_{x_c,3} + Ad_y{}^2 = \frac{190(40)^3}{12} + 190(40)(32+20)^2$$

ومنه فإن عزم القصور I_{x_0} لمساحة المقطع تعطى بما يلي:

$$I_{x_0}=I_{x_0,1}+I_{x_0,2}+I_{x_0,3}=\frac{40(143)^3}{3}+\frac{40(32)^3}{3}+\left(\frac{190(40)^3}{12}+190(40)(32+20)^2\right)=6.10\times10^7\ mm^4$$

-عزم القصور I_x حول المحور x

باستخدام النتيجة السابقة لعزم القصور حول المحور الذي يمر بالمركز المتوسط ونظرية المحور الموازي نحصل على:

$$I_x=I_{x_o}+Ad_y{}^2=6.10\times10^7+[40(175)+190(40)](72)^2=1.3\times10^8\ mm^4$$

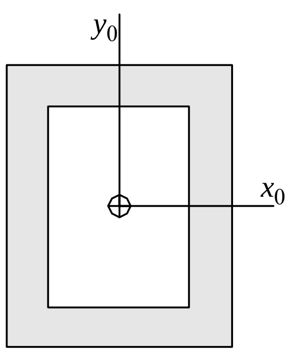
-عزم القصور $I_{x'}$ حول المحور x'

بطريقة مماثلة و باستخدام النتيجة السابقة لعزم القصور حول المحور الذي يمر بالمركز المتوسط ونظرية المحور الموازي نحصل على:

$$I_{x'}==6.10\times10^7+[40(175)+190(40)](143)^2=3.60\times10^8\ mm^4$$

ملاحظة

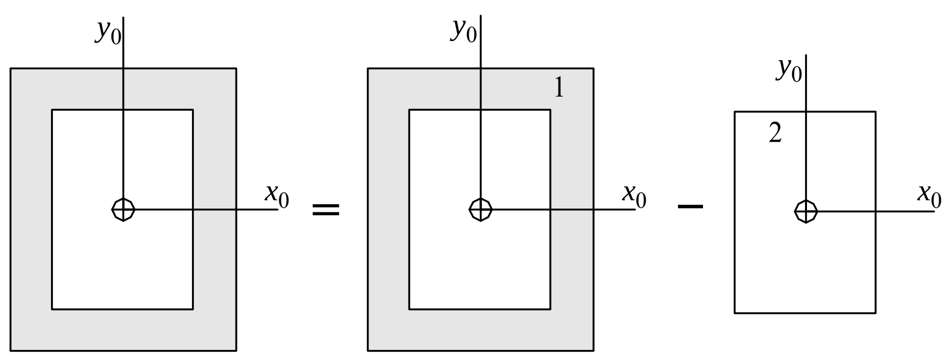
إذا كان في المساحة ثقوب أو أجزاء مقطوعة فإن عزوم قصور هذه المساحات ستعامل على أنها كميات سالبة ولا يعنى هذا أن قصورها كميات سالبة بل تدل ضمنيا على أن المساحات المناظرة التي تنتج عزوم قصور لا وجود لها في المساحة المركبة الأصلية.



I_{x_0}

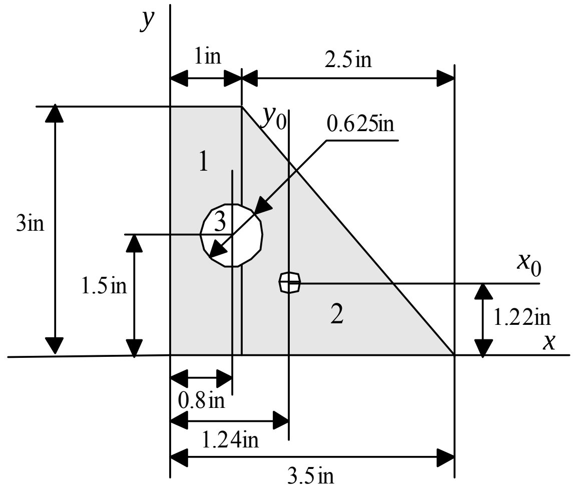
مثال ١٠: أوجد عزم القصور I_{x_0} حول المحور الذي يمر في المركز للمساحة المظللة في الشكل المقابل

الحل:



ينتج من الملاحظة السابقة أن:

$$I_{x_0}=I_{x_0,1}-I_{x_0,2}=\frac{a_1b_1{}^3}{12}-\frac{a_2b_2{}^3}{12}=\frac{1}{12}\left(a_1b_1{}^3-a_2b_2{}^3\right)$$



مثال ١١: أوجد عزم القصور I_{x_0} حول المحور الذي يمر في المركز للمساحة المظللة في الشكل

الحل:

نقسم الصفيحة جزئيا إلى المساحات الأولية الثلاث المبينة في الشكل

عزم القصور المساحة ١ حول المحور x :

$$I_{x,1}=\frac{1(3)^3}{3}$$

عزم القصور المساحة ٢ حول المحور x :

$$I_{x,2}=\frac{2.5(3)^3}{12}$$

عزم القصور المساحة ٣ حول المحور x :باستخدام نظرية المحور الموازي نحصل على

$$I_{x,3}=\frac{\pi(0.625)^4}{64}+\frac{\pi(0.625)^2}{4}(1.5)^2$$

وبالتالي فإن عزم القصور بالنسبة للمحور x تكون

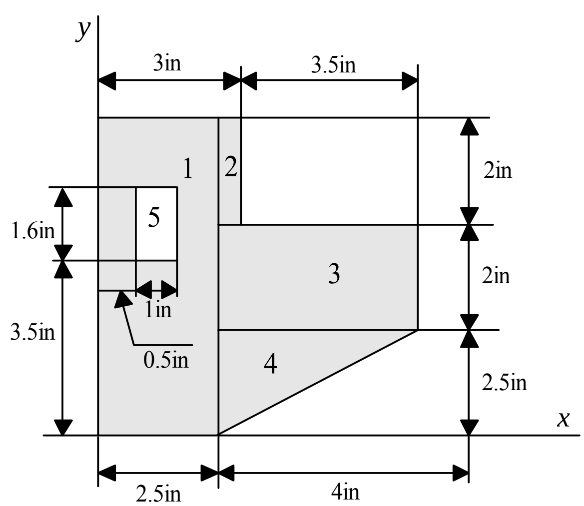
$$I_x=\frac{1(3)^3}{3}+\frac{2.5(3)^3}{12}-\left(\frac{\pi(0.625)^4}{64}+\frac{\pi(0.625)^2}{4}(1.5)^2\right)=13.9\,in^4$$

المساحة المظللة هي:

$$A=1(3)+0.5(2.5)(3)-\frac{\pi(6.25)^2}{4}=6.44\,in^2$$

باستخدام نظرية المحور الموازي يكون لدينا:

$$I_{x_0}=I_x-Ad_y{}^2=13.9-6.44(1.22)^2=4.31\,in^4$$



ملاحظة: إذا كانت المساحة المركبة شكلا يحتاج إلى وصف عدة مساحات أولية فإنه يمكن تنظيم هذه الحسابات في صورة جدول

مثال ١٢: أوجد عزم القصور I_x حول المحور x للمساحة المظللة في الشكل

الحل:

نقسم الصفيحة جزئيا إلى المساحات الأولية الخمسة المبينة في الشكل ونستعمل الجدول التالي:

العنصر	I_{oi}	d_1	A_i	$A_i d_i^{\,2}$	I_i
١	-	–	$2.5(6.5)=16.3$	–	$\frac{2.5(6.5)^2}{3}=228.9$
٢	$\frac{0.5(2)^3}{12}=0.33$	$2.5+2+1=5.5$	$0.5(2)=1$	30.25	30.6
٣	$\frac{4(2)^3}{12}=2.67$	$2.5+1=3.5$	$4(2)=8$	98	100.7
٤	$\frac{4(2.5)^3}{36}=1.74$	$0.667(2.5)=1.67$	$0.5(4)2.5=5$	13.94	15.7
٥	$-\frac{1(1.6)^3}{12}=-0.34$	$3.5+0.8=4.3$	$-1(1.6)=-1.6$	-29.58	-29.9

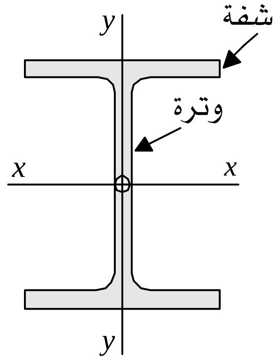
محور الاستناد $\underline{x}$ $\quad A=\sum_i A_i=28.7in^2 \quad I_I=346in^4$

$$k_I=\sqrt{\frac{I_I}{A}}=\sqrt{\frac{346}{28.7}}=3.47in$$

١٢. خواص المقاطع المستعرضة لأعضاء إنشاءات نمطية

يبين الجدول التالي خواص مساحات المقاطع المستعرضة لأعضاء إنشاءات لتنوع واسع من الأشكال والمقاسات. وتشمل هذا الجدول على أبعاد المقطع المستعرض ووزن القدم الطولي من العضو.

جدول خواص مقطع مستعرض نمطية لعواتق شفة عريضة

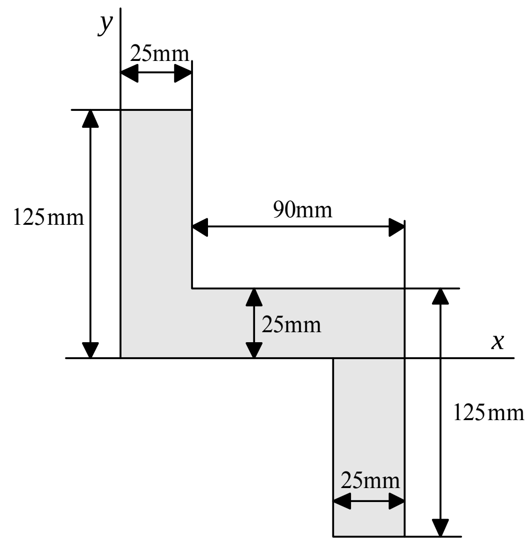


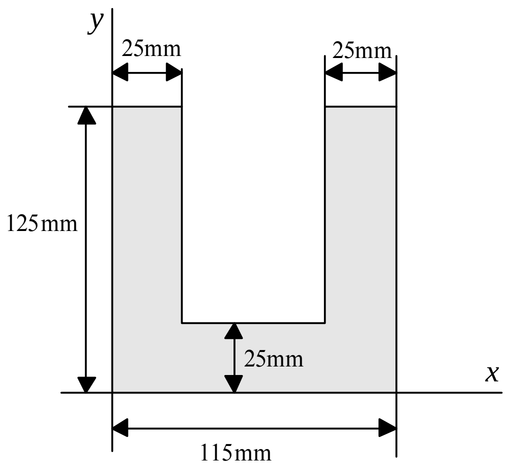
المقاس الأسمى in	الوزن لكل قدم	المساحة in^2	عمق المقطع in	عرض الشفة in	I_{xx} :in^4	I_{yy} :in^4	k_x :in	k_y :in
36×12	194	194	57.11	36.48	12.11	12.103	355	2.49
24×12	194	120	53.29	24.31	12.08	3.635	254	2.68
14×8	194	53	15.59	13.94	8.06	542	57.5	1.92
$36\times5\frac{1}{4}$	194	20	5.88	8.14	5.27	69.2	8.5	1.20

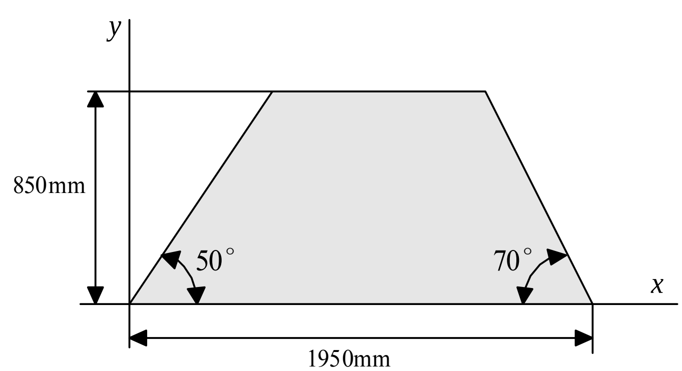
تمارين

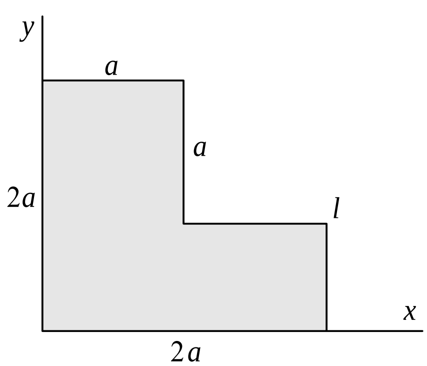
١ - أوجد إحداثيات المركز المتوسط x_c, y_c للمساحة المبينة في الأشكال الآتية

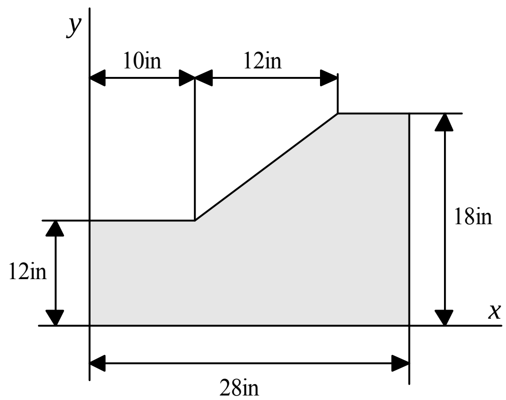
٢ - أوجد عزوم القصور لهذه المساحات بالنسبة للمحاور المارة بالمراكز المتوسطة وبالنسبة للمحور x والمحور y

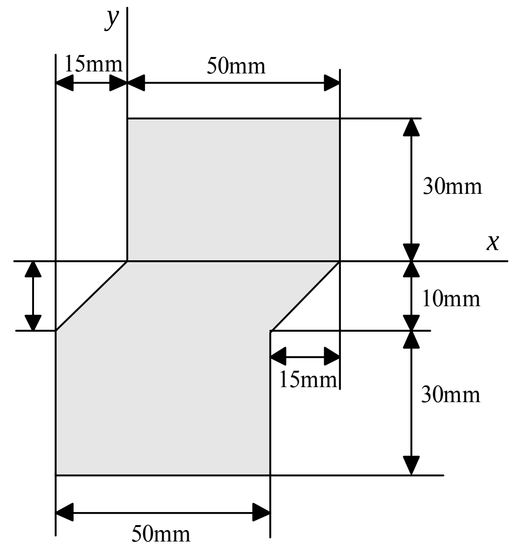


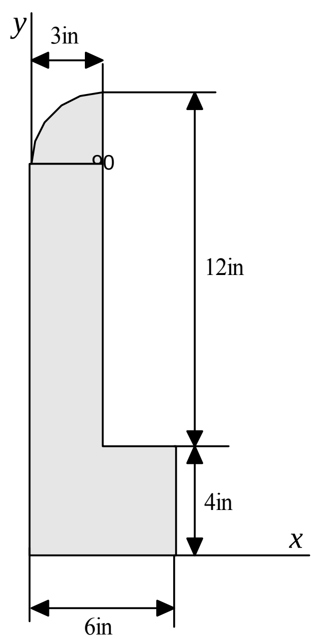


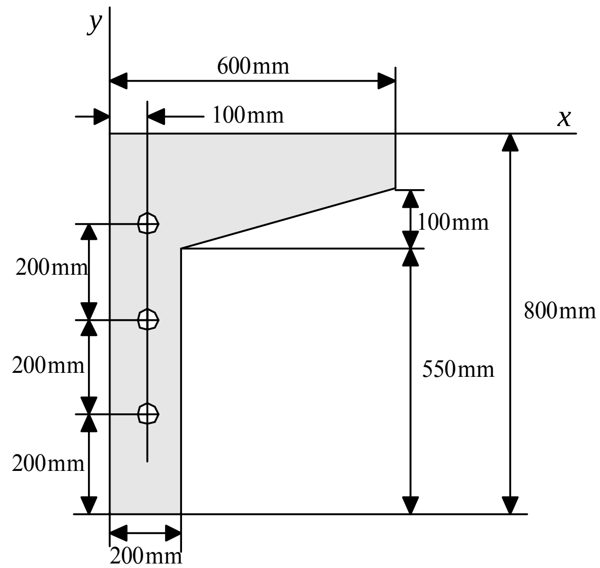


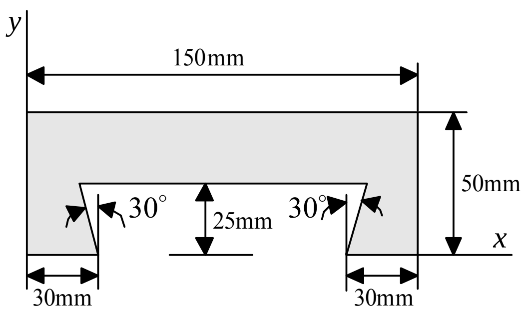



y
10in
12in
18in
12in
x
28in


y
15mm
50mm
30mm
x
10mm
15mm
30mm
50mm


y
3in
90
12in
4in
x
6in


y
600mm
100mm
x
100mm
200mm
800mm
200mm
550mm
200mm
200mm


y
150mm
50mm
30°
25mm
30°
x
30mm
30mm

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

مقدمة في الإحصاء

مقدمة في الإحصاء

٨

الجدارة: معرفة مبادئ في الإحتمالات والقدرة على ترتيب البيانات الإحصائية وتمثيلها وحساب بعض القيم المتعلقة بها...

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- فضاء العينة
- حساب الاحتمالات
- حساب الاحتمال الشرطي
- ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية
- حساب المتوسط والتباين والإنحراف المعياري والوسيط والمنوال لعينة ما.

الوقت المتوقع للتدريب: ست ساعات.

مقدمة في الإحصاء

الإحصاء هو أحد فروع الرياضيات الذي يعنى بترتيب البيانات وتحليلها وتفسيرها بغرض اتخاذ قرار ما، بينما الاحتمالات هي الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية. واستعمل الناس منذ القدم الاحتمالات والإحصاء لأسباب عقدية وصحية واقتصادية وغيرها. ولكن تأسيس الاحتمالات بشكله الرياضي تم خلال مراسلات كانت بين الفرنسيين *Pierre de Fermat* و *Blaise Pascal* في سنة ١٦٥٤م. بينما يعتبر الإنجليزي *John Graunt* هو أول من قام بتحليل إحصائي في سنة ١٦٦٢م، من خلال دراسته لعدد الوفيات نتيجة أوبئة أصابت مدينة لندن.

وتطبيقات الاحتمالات والإحصاء كثيرة في مختلف الميادين خاصة في الظواهر المعقدة التي يصعب دراستها بدقة.

١.١ المجموعات:

تعريف١: نسمي مجموعة كل قائمة أشياء أو أعداد أو خليط منهما، وكل شيء من القائمة أو عدد منها هو عنصر من المجموعة.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تعريف مجموعة باستخدام خاصية مشتركة لجميع عناصرها بدلا من سرد قائمة عناصرها.

مثال١: هذه مجموعات معرفة بالقائمة:

$$A=\{0,1,2,3,4,5\}$$
$$B=\{1,3,5,7,9\}$$
$$C=\{-6,-3,0,3,6,9,12,15\}$$

وهذه المجموعات نفسها معرفة بالخاصية:

$A=\{$ عدد صحيح موجب محصور بين ٠ و ٥ $\}$

$B=\{$ عدد فردي محصور بين ١ و ٩ $\}$

$C=\{$ عدد صحيح يقبل القسمة على ٣ ومحصور بين -6 و 15 $\}$

تعريف٢: نقول عن مجموعة S أنها منتهية إذا كانت قائمتها منتهية أي أن عدد عناصرها هو عدد صحيح غير سالب. في هذه الحالة، نرمز لعدد عناصر S بالرمز: $card(S)$.

مثال٢: المجموعات المعرفة في المثال ١ كلها منتهية:

$$card(A)=6,\quad card(B)=5,\quad card(C)=8$$

تعريف٣: نقول عن مجموعة A إنها مجموعة جزئية من مجموعة S إذا كانت قائمة A جزء من قائمة S . نرمز لذلك بالرمز: $A \subseteq S$ ونرمز لغير ذلك بالرمز: $A \not\subset S$ ..

مثال٣: نعتبر المجموعات التالية:

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{0,1,2,3,4,8\}, \quad C = \{-1,0,2,3,5,8\}, \quad D = \{-1,2,5\}$$

المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B ولكن ليست مجموعة جزئية من المجموعة C لأن 1 غير موجود في قائمة C .

بينما المجموعة D مجموعة جزئية من المجموعة C .

تعريف٤: المجموعة الخالية ϕ هي المجموعة بدون أي عنصر، أي أن: $card(\phi) = 0$.

تعريف٥: الجداء الديكاتي $A \times B$ لمجموعتين غير خاليتين A و B هو مجموعة الأزواج (a,b) بحيث a عنصر من A و b عنصر من B .يمكن تعميم الجداء الديكارتي إلى عدة مجموعات بطريقة مماثلة.

مثال٤: نعتبر المجموعات التالية:

$$A = \{0,1,2,5\}, \quad B = \{5,9\}, \quad C = \{0,1\}$$

احسب كلا مما يلي:

١) $A \times B$ ٢) $A \times B \times C$

الحل:

$$1)\ A \times B = \{(0,5),(0,9),(1,5),(1,9),(2,5),(2,9),(5,5),(5,9)\}$$
$$\begin{aligned}2)\ A \times B \times C = \{&(0,5,0),(0,9,0),(1,5,0),(1,9,0),(2,5,0),(2,9,0),(5,5,0),(5,9,0),\\&(0,5,1),(0,9,1),(1,5,1),(1,9,1),(2,5,1),(2,9,1),(5,5,1),(5,9,1)\}\end{aligned}$$

نظرية١: إذا كانت المجموعتان A و B منتهيتين فإن:

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون إلى عدة مجموعات.

مثال٥: في المثال السابق:

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B) = 4 \times 2 = 8$$
$$card(A \times B \times C) = card(A) \times card(B) \times card(C) = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

٢. فضاء العينة:

تعريف٦: نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة.

مثال ٦ : هذه تجارب:

١) فحص مصباح كهربائي لتقرير هل هو معيب أم لا؟

٢) سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1,2,3,4,5,6 وملاحظة أي رقم سيظهر.

٣) اختيار شخص عشوائيا وسؤاله هل يعجبه نوع جديد من السيارات؟

٤) إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الجهات التي ستظهر (الكتابة أم الصورة).

٥) إلقاء قطعة نقود مرتين وملاحظة الجهات التي ستظهر.

تعريف ٧ : فضاء عينة لتجربة ما هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة. نرمز له بالرمز S .

تجدر الإشارة أنه يمكن ايجاد عدة فضاءات عينة لتجربة واحدة وذلك حسب الترميز المستخدم وتصور المسألة.

مثال ٧ : حدد فضاءات عينة لكل تجربة من المثال ٦.

الحل:

١) النتائج الممكنة للتجربة هي: المصباح معيب، و المصباح غير معيب. نرمز إلى الحالة الأولى بالرمز D وإلى الحالة الثانية بالرمز N . .فيكون: $S=\{N,D\}$.

٢) النتائج الممكنة للتجربة هي الأرقام الستة إذاً: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

٣) النتائج الممكنة للتجربة هي الأجوبة الممكنة للشخص المسؤول: تعجبه السيارة ونرمز له بالرمز: L ، ولا تعجبه ونرمز له بالرمز: D ، وبدون رأي ونرمز له بالرمز: U . فيكون: $S=\{L,D,U\}$.

٤) النتائج الممكنة للتجربة هي ظهور الكتابة ونرمز له بالرمز: T ، وظهور الصورة ونرمز له بالرمز: H . فيكون: $S=\{H,T\}$.

٥) النتائج الممكنة للتجربة هي الجهات التي تظهر في كل من الرمية الأولى والثانية. باستخدام رموز الفقرة ٤ يكون: $S=\{HH,HT,TH,TT\}=\{H,T\}\times\{H,T\}$.

يمكن أن نختار فضاء عينة دون التفريق بين الرمية الأولى والثانية فيكون: $S=\{\{H,H\},\{H,T\},\{T,T\}\}$ ..

وسنرى لاحقا بأن الفضاء الأول أفضل.

تعريف ٨ : نسمي حدثا كل مجموعة جزئية من فضاء العينة. الحدث المستحيل هو المجموعة الخالية.

مثال ٨ : نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1,2,3,4,5,6 وملاحظة أي رقم سيظهر أحداث ممكنة لهذه التجربة هي كالتالي:

A : ظهور رقم فردي وقائمته هي: $A=\{1,3,5\}$ ،

B : ظهور رقم زوجي وقائمته هي: $B=\{2,4,6\}$ ،

C : ظهور رقم أكبر من ٤ وقائمته هي: $C=\{5,6\}$.

مثال ٩: ليكن لدينا ٤ مصابيح مرقمة من ١ إلى ٤ من بينها اثنان معيبان هما: ١ و ٢. نسحب اثنان عشوائيا.

١) حدد فضاء عينة للتجربة وحدد عدد عناصره.

٢) أعط قوائم الأحداث التالية: A : الحصول على مصابيح سليمة، B : الحصول على مصباح معيب واحد، C : الحصول على مصباحين معيبين، D : الحصول على مصباح معيب واحد على الأقل.

الحل:

$$1)\ S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\} \qquad card(S)=6$$
$$2)\ A=\{\{3,4\}\},\quad B=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\},\quad C=\{\{1,2\}\},$$
$$D=\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2\}\}$$

تعريف ٩: يمكن أن نعرف العمليات التالية على الأحداث:

١) اتحاد حدثان $A\cup B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B أو كليهما.

٢) تقاطع حدثان $A\cap B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B في آن واحد.

3) متممة حدث $\overline{A}$ هو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في A.

قانون ديمورغان: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

مثال ١٠: نعتبر تجربة سحب رقم من علبة تحتوي على الأرقام 1,2,3,4,5,6 وملاحظة أي رقم سيظهر نعتبر الأحداث التالية: A : ظهور رقم أكبر من ٣، B : ظهور رقم أصغر من ٦ ، C : ظهور رقم زوجي.

١) حدد فضاء عينة وعدد عناصره.

٢) أعط قوائم الأحداث التالية: A و B و C .

٣) أعط قوائم الأحداث التالية: $A\cap B$ و $A\cap C$ و $B\cap C$ و $A\cap B\cap C$ و $A\cup B$ و $A\cup C$ و $B\cup C$ و $A\cup B\cup C$.

٤) أعط قوائم الأحداث التالية: $\overline{A}$ و $\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}$ و $\overline{A}\cap\overline{B}$.

٥) صف باستخدام جمل أحداث الفقرة ٤.

الحل:

1) $S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad card(S)=6$

2) $A=\{4,5,6\},\quad B=\{1,2,3,4,5\},\quad C=\{2,4,6\},$

3) $A\cap B=\{4,5\},\quad A\cap C=\{4,6\},\quad B\cap C=\{2,4\},\quad A\cap B\cap C=\{4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=S,\quad A\cup C=\{2,4,5,6\},\quad B\cup C=S,\quad A\cup B\cup C=S$

4) $\overline{A}=\{1,2,3\},\quad \overline{B}=\{6\},\quad \overline{A\cup B}=\{\}=\phi,\quad \overline{A}\cap\overline{B}=\{\}=\phi$

٥) $\overline{A}$: ظهور رقم أصغر من ٤ ، $\overline{B}$: ظهور رقم أكبر من ٥ أو ظهور الرقم ٦ ، $\overline{A\cup B}$: عدم ظهور رقم أكبر من ٣ أو أصغر من ٦ ، $\overline{A}\cap\overline{B}$: ظهور رقم أصغر من ٤ و أكبر من ٥.

٣. فضاء الاحتمالات:

تعريف ١٠: نقول عن فضاء عينة منته S إنه متساوي الاحتمالات إذا كانت كل نتيجة منه لها نفس حظ الوقوع.

في هذه الحالة، يكون احتمال حدث A معرفا كما يلي: $P(A)=\dfrac{card(A)}{card(S)}$.

مثال ١١: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرة واحدة.

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{H,T\}$ وهو فضاء عينة متساوي الإحتمالات لأن قطعة النقود متزنة. ومنه فإن احتمال ظهور الصورة هو:

$$P(\{H\})=\frac{card(\{H\})}{card(S)}=\frac{1}{2}=50\%$$

سنكتب $P(H)$ بدلا من $P(\{H\})$ تسهيلا للكتابة. وكذا بالنسبة للأحداث المتكونة من نتيجة واحدة.

واحتمال ظهور الكتابة سيكون:

$$P(T)=P(\{T\})=\frac{card(\{T\})}{card(S)}=\frac{1}{2}=50\%$$

مثال ١٢: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرتين..

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{HH,HT,TH,TT\}=\{H,T\}\times\{H,T\}$ وهو فضاء عينة متساوي الاحتمالات لأن قطعة النقود متزنة. ومنه فإن احتمال ظهور الصورة مرتان هو:

$$P(HH)=\frac{card(\{HH\})}{card(S)}=\frac{1}{4}=25\%$$

بينما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة فقط هو:

$$P(\{HT,TH\})=\frac{card(\{HT,TH\})}{card(S)}=\frac{2}{4}=50\%$$

لكن لو اعتبرنا فضاء العينة التالي: $S'=\{\{H,H\},\{H,T\},\{T,T\}\}$ فإنه غير متساوي الاحتمالات لأن النتيجة $\{H,T\}$ وهي ظهور الصورة مرة واحدة فقط لها حظ وقوع ضعف حظ وقوع النتيجة $\{H,H\}$ وهي ظهور الصورة مرتان.

مثال ١٣: نعتبر تجربة المثال ١٠. احسب احتمالات الأحداث A و B و C .

الحل:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\} \qquad card(S)=6$$
$$A=\{4,5,6\},\quad B=\{1,2,3,4,5\},\quad C=\{2,4,6\}$$
$$P(A)=\frac{3}{6}=50\%,\quad P(B)=\frac{5}{6}\cong 83.33\%,\quad P(C)=\frac{3}{6}=50\%$$

تعريف ١١: إذا كان لدينا فضاء عينة منته فيمكن تعريف احتمال حدث وفق الشروط التالية:

١) أن يكون احتمال كل نتيجة ممكنة هو نسبة مئوية موجبة أي عدد حقيقي محصور بين ٠ و ١.

٢) أن يكون مجموع احتمالات كل النتائج الممكنة (المكونة لفضاء العينة) يساوي ١ أو ١٠٠٪.

في هذه الحالة، يكون احتمال الحدث المستحيل هو ٠ ويكون احتمال حدث غير مستحيل هو مجموع احتمالات النتائج الممكنة المكونة له.

فضاء الاحتمالات هو فضاء العينة مزود باحتمالات النتائج الممكنة والتي تسمى احتمالات نقطية.

مثال ١٤: ورشة تصليح سيارات تصلح في يوم شغل واحد من ٥ إلى ١٤ سيارة وفق الاحتمالات التالية:

عدد السيارات	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
الاحتمال	٠,٠٥	٠,٠٠	٠,١٧	٠,٠٨	٠,١١	٠,٢٣	٠,٠٦	٠,١٤	٠,١٣	٠,٠٣

احسب احتمال كلا مما يلي:

١) تصليح أقل من ١١ سيارة في يوم شغل واحد.

٢) تصليح أكثر من ٩ سيارات في يوم شغل واحد.

٣) تصليح من ٨ إلى ١٣ سيارة.

٤) تصليح أقل من ٤ سيارات.

٥) تصليح أكثر من ٢٠ سيارة.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$. ونرمز بالرموز A و B و C و D و E للأحداث الموافقة للفقرات ١ إلى ٥ على الترتيب.

الاحتمالات النقطية معطاة في الجدول وبالتالي فلدينا فضاء احتمالات لأن كل الاحتمالات النقطية محصورة بين ٠ و ١ وكذلك مجموعها يساوي ١.

$$1)\ A=\{5,6,7,8,9,10\}$$
$$P(A)=P(5)+P(6)+P(7)+P(8)+P(9)+P(10)$$
$$=0.05+0.00+0.17+0.08+0.11+0.23=64\%$$
$$2)\ B=\{10,11,12,13,14\}$$
$$P(A)=P(10)+P(11)+P(12)+P(13)+P(14)$$
$$=0.23+0.06+0.14+0.13+0.03=59\%$$
$$3)\ C=\{8,9,10,11,12,13\}$$
$$P(A)=P(8)+P(9)+P(10)+P(11)+P(12)+P(13)$$
$$=0.08+0.11+0.23+0.06+0.14+0.13=75\%$$
$$4)\ D=\{\}=\phi \Rightarrow P(D)=0$$
$$5)\ E=\{\}=\phi \Rightarrow P(E)=0$$

٤. الاحتمال الشرطي:

تعريف ١٢: الحدث الشرطي $B|A$ هو الحدث B بشرط وقوع الحدث غير المستحيل A (أي أن $P(A)\neq 0$). و الاحتمال الشرطي هو احتمال حدث شرطي.

نرمز لفضاء العينة الشرطي بالرمز: $S|A$ ونرمز للاحتمال الشرطي السابق بالرمز: $P(B|A)$.

مثال ١٥: نعتبر تجربة إلقاء قطعة متزنة من النقود مرتين.

احسب احتمال ظهور الكتابة في الرمية الثانية إذا ظهرت الصورة في الرمية الأولى.

الحل:

نرمز للأحداث كما يلي:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الكتابة في الرمية الثانية. والمطلوب هو حساب احتمال $B|A$.

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{HH,HT,TH,TT\}$ فيكون: $S|A=\{HH,HT\}$ و $B|A=\{HT\}$ ومنه:

$$P(B|A) = \frac{card(B|A)}{card(S|A)} = \frac{1}{2} = 50\%$$

مثال ١٦: نسحب كرتين عشوائياً بدون إرجاع المسحوب من صندوق يحتوي على ٥ كرات حمراء و ٣ كرات سوداء. احسب احتمال أن تكون:

١) الكرة الأولى حمراء.

٢) الكرة الأولى سوداء.

٣) الكرة الثانية سوداء إذا كانت الأولى حمراء.

٤) الكرة الثانية سوداء إذا كانت الأولى سوداء.

الحل:

نرمز للأحداث التالية كما يلي:

A : الكرة الأولى حمراء، B : الكرة الأولى سوداء، C : الكرة الثانية سوداء.

فتكون الأحداث المطلوب حساب احتمالها في الفقرات من ١ إلى ٤ هي على الترتيب: A و B و $C|A$ و $C|B$.

١) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, B_1, B_2, B_3\}$ حيث R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ترمز للكرات الحمراء و B_1, B_2, B_3 ترمز للكرات السوداء. فيكون:

$$A = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}, \quad P(A) = \frac{5}{8} = 62.5\% \neq 0$$

٢) نعتبر فضاء العينة السابق، فيكون:

$$B = \{B_1, B_2, B_3\}, \quad P(B) = \frac{3}{8} = 37.5\% \neq 0$$

٣) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S|A = \{R_2, R_3, R_4, R_5, B_1, B_2, B_3\}$ لأن الكرات الحمراء متماثلة فلا فرق بين سحب أي منها. ويكون: $C|A = \{B_1, B_2, B_3\}$ ومنه:

$$P(C|A) = \frac{3}{7} \cong 42.86\% .$$

٤) يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S|B = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, B_2, B_3\}$ لأن الكرات السوداء متماثلة فلا فرق بين سحب أي منها. ويكون: $C|B = \{B_2, B_3\}$ ومنه:

$$P(C|B) = \frac{2}{7} \cong 28.57\% .$$

نظرية ٢: نعتبر فضاء عينة S وحدثان A و B فتكون لدينا القوانين التالية:

$$0)\ P(S)=1, \qquad P(\phi)=0$$
$$1)\ P(\overline{A})=1-P(A), \qquad P(A)=1-P(\overline{A})$$
$$2)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$3)\ P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad (P(A)\neq 0)$$

مثال ١٧: نقوم بإلقاء قطعة متزنة من النقود أربع مرات.

احسب احتمال كلا مما يلي:

١) ظهور الكتابة أربع مرات.

٢) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي:

$$S=\{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, \cdots, TTTT\}$$
$$=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$$
$$card(S)=2\times 2\times 2\times 2=16$$

نرمز إلى الأحداث الموافقة للفقرتين ١ و ٢ بالرمزين A و B على الترتيب.

$$1)\ A=\{TTTT\}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{16}=6.25\%$$

٢) يمكن أن نصف الحدث B كالتالي: B : عدم ظهور الكتابة أربع مرات، فيكون:

$$B=\overline{A}\Rightarrow P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{16}=93.75\%$$

وذلك باستخدام القانون ١) من النظرية السابقة.

مثال ١٨: إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات هو 70% واحتمال نجاحه في مقرر الحاسب هو 85% واحتمال نجاحه في كلا المقررين هو 73% فما هو احتمال نجاحه في مقرر الرياضيات أو مقرر الحاسب؟

الحل:

لا يمكن اعتبار فضاء عينة بسيط ومتساوي الاحتمالات. كما أننا لا نحتاج إلى ذلك لحل المثال.

نعتبر الأحداث التالية: A : نجاح الطالب في مقرر الرياضيات و B : نجاح الطالب في مقرر الحاسب فيكون المطلوب هو حساب احتمال $A\cup B$ و تكون المعطيات كالتالي:

$$P(A)=0.7, \quad P(B)=0.85, \quad P(A\cap B)=0.73$$

ومنه باستخدام القانون ٢) من النظرية السابقة نجد:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.85-0.73=82\%$$

مثال١٩: أعد حل المثال ١٥ باستخدام القانون ٣) من النظرية السابقة.

الحل:

يمكن أن نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

نرمز للأحداث كما يلي:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الكتابة في الرمية الثانية. والمطلوب هو حساب احتمال $B|A$. فيكون:

$$A=\{HH,HT\},\quad B=\{HT,TT\},\quad A\cap B=\{HT\}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=50\%$$

تعريف١٣: نقول عن حدثين A و B أنهما مستقلان إذا كان لا تأثير لاحتمال الواحد على احتمال الآخر، أي أن:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

وإذا لم يكونا مستقلين فنقول عنهما إنهما مرتبطان.

نظرية٣: ليكن لدينا حدثان A و B . نحسب احتمال التقاطع كما يلي:

إذا كان الحدثان مستقلين فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

إذا كان الحدثان مرتبطين فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$

تجدر الإشارة إلى أن القانون الثاني هو القانون العام لاحتمال التقاطع في حالة عدم معرفتنا هل الحدثان مستقلان أم مرتبطان؟.

مثال٢٠: نقوم بسحب عشوائي لمسمار واحد من مجموعة من المسامير بحيث احتمال أن يكون رقيقاً جداً هو ٠,١ واحتمال أن يكون قصيراً جداً إذا علمنا أنه رقيق جدا هو ٠,٢. احسب احتمال أن يكون المسمار رقيقا جدا وقصيراً جداُ.

الحل:

لا يمكن اعتبار فضاء عينة بسيط ومتساوي الاحتمالات. كما أننا لا نحتاج إلى ذلك لحل المثال.

نرمز للأحداث كما يلي: A : أن يكون المسمار رقيقاً جداً و B : أن يكون المسمار قصيراً جداً فيكون المطلوب هو احتمال $A\cap B$ والمعطيات هي:

$$P(A)=0.1,\quad P(B|A)=0.2$$

ما دمنا لا نعرف هل الحدثان مستقلان أم مرتبطان فنطبق القانون العام:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=0.1\times 0.2=2\%$$

مثال ٢١: نقوم بإلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات ونعتبر الأحداث التالية:

A : ظهور الصورة في الرمية الأولى، B : ظهور الصورة في الرمية الثانية، C : ظهور الصورة مرتين فقط على التوالي. ادرس استقلال كل زوج من الأحداث السابقة.

الحل:

من الواضح أن الحدثين A و B مستقلان وهذا ما سنتحقق منه. بينما العلاقة بين كلا من A و C من جهة و B و C من جهة أخرى غير واضحة.

نعتبر فضاء العينة التالي:

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$$
$$card(S)=2\times 2\times 2=8$$

وتكون قوائم الأحداث واحتمالاتها كما يلي:

$$A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\},\quad P(A)=\frac{4}{8}=50\%$$

$$B=\{HHH,HHT,THH,THT\},\quad P(B)=\frac{4}{8}=50\%$$

$$C=\{HHT,THH\},\quad P(C)=\frac{2}{8}=25\%$$

١) العلاقة بين A و B :

$$A\cap B=\{HHH,HHT\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{8}=25\%=50\%\times 50\%=P(A)\times P(B)$$

إذاً A و B مستقلان.

٢) العلاقة بين A و C :

$$A\cap C=\{HHT\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{1}{8}=12.5\%=50\%\times 25\%=P(A)\times P(C)$$

إذاً A و C مستقلان.

١) العلاقة بين B و C :

$$B\cap C=\{HHT,THH\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{2}{8}=25\%\neq 12.5\%=50\%\times 25\%=P(B)\times P(C)$$

إذاً B و Cمرتبطان.

مثال ٢٢: نسحب مسمارين اثنين من علبة تحتوي على ١٠ مسامير من بينها ٣ معيبة.

احسب احتمال أن يكون المسماران سليمين إذا كان السحب:

١) بإرجاع المسحوب إلى العلبة ، ٢) بدون إرجاع المسحوب.

الحل:

نعتبر الأحداث التالية:

A : المسمار المسحوب الأول سليم، B : المسمار المسحوب الثاني سليم. فيكون المطلوب هو احتمال $A \cap B$

١) إذا كان السحب بإرجاع فإن الحدثين A و B مستقلان ومنه:.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 49\%$$

٢) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الحدثين A و B مرتبطان ومنه:.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \cong 46.67\%$$

تمارين

تمرين ١: نقوم بإلقاء قطعة نقود متزنة ثم نقوم بسحب عدد من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ ..

١) حدد فضاء عينة للتجربة.

٢) اعط قائمة كل حدث مما يلي:

A : ظهور صورة وعدد زوجي، B : ظهور عدد أولي، C : ظهور كتابة وعدد فردي.

٣) احسب احتمال كل حدث من الفقرة ٢).

تمرين ٢: نعتبر فضاء العينة التالي: $S=\{1,2,3,4\}$. في أية حالة مما يلي يكون لدينا فضاء احتمالات:

$$1)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{3},\quad P(3)=\frac{1}{4},\quad P(4)=\frac{1}{5}$$

$$2)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=-\frac{1}{4},\quad P(4)=\frac{1}{2}$$

$$3)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=\frac{1}{8},\quad P(4)=\frac{1}{8}$$

$$4)\ P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{1}{4},\quad P(3)=\frac{1}{4},\quad P(4)=0$$

تمرين ٣: ما هو احتمال ظهور الكتابة مرة واحدة على الأقل عند إلقاء قطعة نقود متزنة ٣ مرات؟

تمرين ٤: ما هو احتمال ظهور كرة بيضاء عند سحب كرة واحدة من صندوق به ٤ كرات بيضاء و ٣ حمراء و ٥ زرقاء؟

تمرين ٥: نسحب بطاقة من علبة تحتوي على ٥٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٥٠.

احسب احتمال كلا مما يلي:

١) سحب الرقم ٧.

٢) سحب رقم أصغر من ١١.

٣) سحب رقم أكبر من ١٩.

تمرين ٦: نسحب بطاقة من علبة تحتوي على ٥٠ بطاقة مرقمة من ٥١ إلى ١٠٠.

احسب احتمال كلا مما يلي:

١) سحب الرقم ٥٣.

٢) سحب رقم أصغر من ٦١.

٣) سحب رقم أكبر من ٧٩.

تمرين ٧: نقوم بإلقاء ثلاث قطع نقود متزنة. ما هو احتمال أن تكون جميعها صورا:

١) إذا كانت الأولى صورة؟

٢) إذا كانت واحدة من القطع صورة؟

٣) إذا كانت واحدة على الأقل من القطع صورة؟

تمرين ٨: لدينا علبتان بكل واحدة منهما ست بطاقات مرقمة من ١ إلى ٦. نسحب من كل علبة بطاقة. احسب احتمال كلا مما يلي إذا سحبنا عددين مختلفين:

١) مجموعهما هو ٦.

٢) سحب الرقم ١.

٣) مجموعهما أصغر أو يساوي ٤..

٥. وسائط العينة:

تعريف ١٤: نسمي عينة كل قائمة صغيرة نسبيا من البيانات مأخوذة من قائمة كبيرة جدا تسمى مجموعة سكانية.يصعب سردها.

وذلك بغرض دراسة العينة ومحاولة تعميم نتائج هذه الدراسة على المجموعة السكنية ككل.

مثال ٢٣: لو أردنا أن نعرف رأي طلبة الكلية التقنية في جوانب كثيرة متعلقة بالمكتبة فإنه قد يصعب معرفة آراء جميع الطلبة في كل هذه الجوانب ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا ونجري الدراسة.

مجموع طلبة الكلية يمثلون المجموعة السكانية والمجموعة المختارة تمثل عينة.

مثال ٢٤: لو أردنا معرفة أطوال سكان المملكة وأوزانهم بحسب أعمارهم فإنه قد يصعب تحديد ذلك لكل السكان ولهذا نختار مجموعة صغيرة نسبيا من الأشخاص من مختلف الأعمار ونجري الدراسة.

مجموع السكان يمثلون المجموعة السكانية والأشخاص المختارون يمثلون عينة.

سنكتفي في هذه الفقرة بدراسة عينات البيانات المشتملة على قيمة واحدة فقط كأطوال السكان فقط أو أعمارهم فقط أو أوزانهم فقط.

مثال ٢٥: هذه عينة لعدد المستأجرين لـ٤٥ شقة في مدينة ما:

2, 1, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 4, 2, 6, 2, 4, 3, 1,
2, 4, 3, 1, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 2, 3, 1, 4, 2,
3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 1, 3, 4

تعريف ١٥: طول العينة هو عدد عناصرها وتكرار عنصر ما هو عدد مرات ظهور العنصر في العينة.

مثال ٢٦: نعتبر العينة السابقة.

١) ما هو طول هذه العينة؟

٢) أنشأ جدولا لتكرار العناصر.

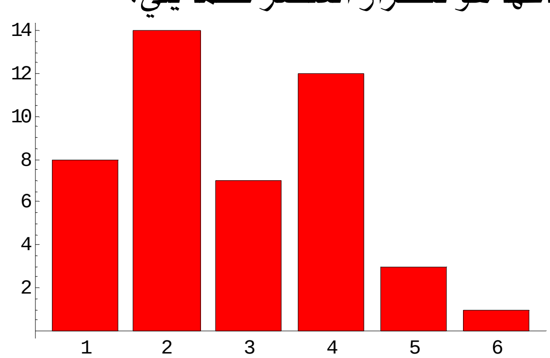
الحل:

١) طول العينة هو٤٥.

٢) يمكن أن ننشأ جدول التكرار التالي:

عدد الأشخاص	التكرار	التكرار المتراكم
١	٨	٨
٢	١٤	٢٢
٣	٧	٢٩
٤	١٢	٤١
٥	٣	٤٤
٦	١	٤٥
المجموع	٤٥	

كما يمكن أن نمثل العمودين الأولين من هذا الجدول باستخدام ما يسمى بالمدرجات التكرارية التي هي عبارة عن مستطيلات ارتفاعها هو تكرار العنصر كما يلي:



تعريف ١٦: لتكن لدينا العينة التالية: $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ يمكن تعريف وسائط العينة التالية:

متوسط العينة هو:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

تباين العينة هو:

$$s^2 = \frac{\left(\bar{x}-x_1\right)^2 + \left(\bar{x}-x_2\right)^2 + \cdots + \left(\bar{x}-x_n\right)^2}{n-1}$$

الانحراف المعياري للعينة هو:

$$s = \sqrt{s^2}$$

إذا كانت عناصر العينة مرتبة من الأصغر إلى الأكبر (أو العكس) فإن وسيط العينة يعرف كما يلي:

إذا كان n فرديا فإن وسيط العينة هو: $med = x_{\frac{n+1}{2}}$

إذا كان n زوجيا فإن وسيط العينة هو: $med = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

منوال العينة هو عنصر من العينة يكون تكراره أعلى تكرار. يرمز له بالرمز: $mode$.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن أن يكون هناك عدة منوالات.

كما أنه يمكن حساب وسائط العينة المعرفة هنا باستخدام جدول التكرار.

المتوسط والوسيط والمنوال تعطينا فكرة عن متوسط القيم بينما التباين والانحراف المعياري تعطينا فكرة عن تشتت القيم.

مثال ٢٧ : احسب وسائط العينة المعرفة سابقا للمثال السابق.

الحل:

١) متوسط العينة يمثل مجموع العناصر على عددهم ويمكن حسابه مباشرة كما يمكن حسابه باستخدام جدول التكرار وذلك بضرب العنصر في تكراره ثم الجمع كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{(8\times 1) + (14\times 2) + (7\times 3) + (12\times 4) + (3\times 5) + (1\times 6)}{45} = 2.8$$

٢) الملاحظة نفسها بالنسبة لتباين العينة:

$$s^2 = \frac{8(2.8-1)^2 + 14(2.8-2)^2 + 7(2.8-3)^2 + 12(2.8-4)^2 + 3(2.8-5)^2 + 1(2.8-6)^2}{45-1} \cong 1.75$$

٣) الانحراف المعياري للعينة سيكون:

$$s = \sqrt{1.75} \cong 1.32$$

٤) بما أن $n = 45$ فردي إذاً باستخدام عمود التكرار المتراكم فإن وسيط العينة هو:

$$med = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{45+1}{2}} = x_{23} = 3$$

٤) واضح من جدول التكرار بأن المنوال هو:

$$mode = 2$$

طريقة أخرى للحل:

يمكن حساب متوسط العينة وتباينها باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي (مثلا: CASIO $fx-82TL$):

الخطوة الأولى: اختيار نمط الإنحراف المعياري (MODE SD).

الخطوة الثانية: مسح ذاكرة النمط من البيانات (= SHIFT Scl).

الخطوة الثالثة: إدخال البيانات (إدخال العنصر ثم الضغط على DT).

الخطوة الرابعة: حساب المتوسط (SHIFT $\bar{x}$) و الانحراف المعياري (SHIFT xσ_{n-1}) ثم التباين (وهو مربع الانحراف المعياري).

مثال ٢٨ : لتكن لدينا أطوال عشرة مسامير مختارة عشوائيا ومقاسة بالسنتيمتر (سم) كما يلي:

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

احسب متوسط هذه العينة وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها.

الحل:

يمكن أن ننشأ جدولا تكراريا لهذه العينة كما يلي:

الأطوال (سم)	التكرار	التكرار المتراكم
٠,٨٠	٢	٢
٠,٨١	٥	٧
٠,٨٢	٣	١٠

باستخدام جدول التكرار نحسب المطلوب:

$$\bar{x} = \frac{(2\times 0.80) + (5\times 0.81) + (3\times 0.82)}{10} = 0.811\, cm$$

$$s^2 = \frac{2(0.811-0.80)^2 + 5(0.811-0.81)^2 + 3(0.811-0.82)^2}{10-1} \cong 0.000\,054\, cm^2$$

$$s = \sqrt{0.000054} \cong 0.007348\, cm$$

$$med = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{10}{2}} + x_{\frac{10}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(0.81+0.81) = 0.81\, cm$$

$$mode = 0.81\, cm$$

تمارين

تمرين ١: أوجد المتوسط والتباين والإنحراف المعياري والوسيط والمنوال للأعداد الستة التالية:

$$4 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 10$$

تمرين ٢: نتائج فصل في امتحان من ٢٠ سؤال هي كما يلي:

عدد الإجابات الصحيحة	٩	١٠	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
عدد الطلاب	١	٢	١	٢	٧	٢	١	٧	٢	٦	٤

أوجد وسائط هذه العينة.

تمرين ٣: احسب متوسط العينة التالية وتباينها وانحرافها المعياري ووسيطها ومنوالها:

$$3 \quad 4 \quad 10 \quad 4 \quad 4$$

لاحظ مساهمة العنصر ١٠ في التباين وعلق على ذلك.

تمرين ٤: احسب المتوسط والتباين لكلا العينتين التاليتين: 111 110 109 و 115 110 105 .
قارن بين العينتين.

تمرين ٥: أنشأ المدرجات التكرارية لكل العينات السابقة.

المراجع

١) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ -١٩٨٣م.

٢) سعد مسعود، ترجمة الميكانيكا الهندسية استاتيكا لجوزيف شيللي، دار ماكجروهيل للنشر، نيويورك، ١٩٨١.

3) Alfred Aho, John Hopcroft and Jeffrey Ullman, Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison Wesley, Reading, England, 1974.

4) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

5) C. L. Lui, Elements of Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1977.

6) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

7) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

8) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS

BAE SYSTEMS