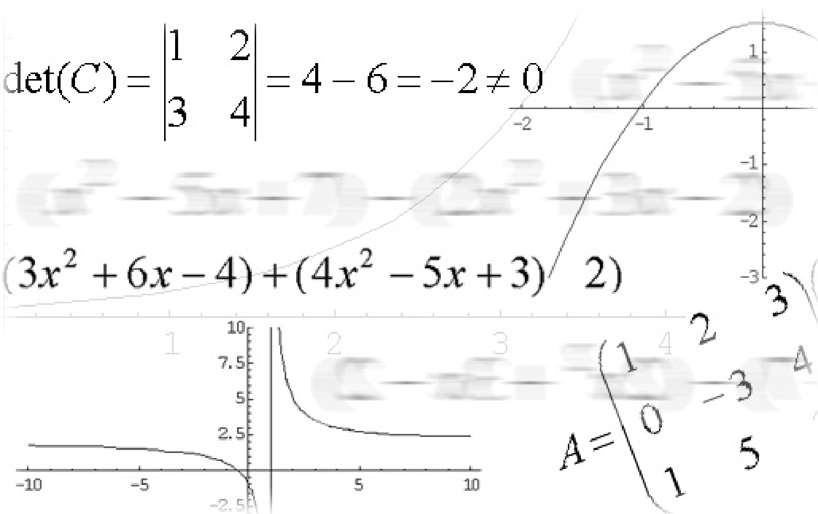
المملكـــة العربيــــة الســـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات الحاسب

برمجيات

١٩١ ريض



مقدمه

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات الحاسب" لمتدربي قسم" الحاسب " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله مولى النعم، الحمد له على ما خصنا من نعمه وعمّ، والصلاة والسلام على خير العرب والعجم. أما بعد فإن مقرر رياضيات الحاسب يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدرب البرمجيات لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للمتدرب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح.

ودراسة هذا المقرر ستمكن المتدرب من:

- فهم أنظمة العد خاصة النظام الثنائي والستعشري.
- فهم التعبيرات المنطقية والعمليات المنطقية.
- فهم البوابات المنطقية والدوائر المنطقية.
- فهم المجموعات والدوال والخوارزميات.

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى أربع وحدات رئيسة:
تعنى الوحدة الأولى لتعريف المتدرب بأنظمة العد الأساسية في الحاسب كالنظام العشري والنظام الثنائي والنظام الستعشري وبعض الأنظمة المتفرعة عن النظام الثنائي وكيفية أداء العمليات الحسابية الأساسية في النظام الثنائي..

و خصصت الوحدة الثانية لدراسة التعبيرات المنطقية والعمليات المنطقية المختلفة وجدول الحقائق..
أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة المتدرب بالبوابات المنطقية وكيفية استخدامها لتصميم دوائر منطقية مختصرة.

أما الوحدة الرابعة فقد تناولت مبادئ الرياضة الرقمية و قسمت إلى ثلاث فصول كما يلي:

خصص الفصل الأول لدراسة المجموعات والعمليات المختلفة عليها والتقابل بينها وبين العمليات المنطقية وكذلك المجموعات العددية المشهورة.

بينما خصص الفصل الثاني لمراجعة بعض المفاهيم في الدوال وأنواعها و كذلك دراسة بعض الدوال العددية الهامة في الحاسب.

وأخيرا، تناول الفصل الأخير الخوارزميات وكيفية حساب تعقدها وبعض الخوارزميات المشهورة في الحاسب.

والله الموفق

المملكــة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات الحاسب

أنظمة العد

أنظمة العد

١

الجدارة: معرفة أنظمة العد الأساسية في الحاسب والعمليات الحسابية فيها والتحويل بينها....

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- التحويل بين النظام العشري والنظام الثنائي.
- اجراء العمليات الحسابية في النظام الثنائي.
- تمثيل الأعداد السالبة باستخدام النظام الثنائي.
- التحويل بين النظام الستعشري والنظام العشري والثنائي.

الوقت المتوقع للتدريب: ثمان ساعات.

أنظمة العد

إن النظام الثنائي أساسي في الإلكترونيات الرقمية وكذلك أنظمة الترميز الرقمية الأخرى كالنظام الستعشري ونظام الأسكي (ASCII).

١. النظام العشري:

نستخدم في النظام العشري عشرة أرقام للتعبير عن مقادير معينة وهي: ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩.

فإذا أردنا مثلا أن نعبر عن مقدار صحيح محصور بين ٠ و ٩، استخدمنا خانة واحدة، فإن كان المقدار أكبر، احتجنا إلى زيادة عدد الخانات.

وإذا أردنا أن نعبر عن مقدار كسري، احتجنا إلى استخدام النقطة العشرية وعدد خانات على يمينها بحسب الحاجة.

مثال١: العدد الكسري $\frac{9}{2}$ يمثل في النظام العشري بالعدد 4.5 .

فاحتجنا إلى خانة واحدة على يمين النقطة العشرية.

ولهذا فيمكن أن نقول بأن النظام العشري هو نظام ذو أوزان بمعنى أن كل خانة لها وزن معين. فأوزان الخانات على يسار النقطة العشرية هي على الترتيب:

$$1\,(10^0) \quad 10\,(10^1) \quad 100\,(10^2) \quad 1000\,(10^3) \quad 10000\,(10^4) \quad \cdots$$

بينما أوزان الخانات على يمين النقطة العشرية هي على الترتيب:

$$0.1\,(10^{-1}) \quad 0.01\,(10^{-2}) \quad 0.001\,(10^{-3}) \quad 0.0001\,(10^{-4}) \quad 0.00001\,(10^{-5}) \quad \cdots$$

مثال٢:

$$124 = (4\times 1) + (2\times 10) + (1\times 100) = (4\times 10^0) + (2\times 10^1) + (1\times 10^2)$$

$$0.563 = (5\times 0.1) + (6\times 0.01) + (3\times 0.001) = (5\times 10^{-1}) + (6\times 10^{-2}) + (3\times 10^{-3})$$

$$124.563 = (1\times 10^2) + (2\times 10^1) + (4\times 10^0) + (5\times 10^{-1}) + (6\times 10^{-2}) + (3\times 10^{-3})$$

ولهذا فإن تمثيل الأعداد في النظام العشري يكون باستخدام قوى العدد ١٠ (أي ١٠ أس عدد صحيح)

٢. النظام الثنائي:

النظام الثنائي هو طريقة أخرى لتمثيل الأعداد نستخدم فيه الأرقام ٠ و ١ فقط. ومثل النظام العشري، يكون لكل خانة وزن معين كقوة للعدد ٢ (أي ٢ أس عدد صحيح).

فيكون للخانات على يسار النقطة الثنائية الأوزان التالية على الترتيب:

$$1\,(2^0) \quad 2\,(2^1) \quad 4\,(2^2) \quad 8\,(2^3) \quad 16\,(2^4) \quad \cdots$$

بينما أوزان الخانات على يمين النقطة الثنائية هي على الترتيب:

$$0.5\,(2^{-1}) \quad 0.25\,(2^{-2}) \quad 0.125\,(2^{-3}) \quad 0.0625\,(2^{-4}) \quad 0.015625\,(2^{-5}) \quad \cdots$$

مثال٣: مثل الأعداد الصحيحة من ٠ إلى ١٥ في النظام الثنائي.

الحل:

النظام العشري	النظام الثنائي
٠	٠٠٠٠
١	٠٠٠١
٢	٠٠١٠
٣	٠٠١١
٤	٠١٠٠
٥	٠١٠١
٦	٠١١٠
٧	٠١١١
٨	١٠٠٠
٩	١٠٠١
١٠	١٠١٠
١١	١٠١١
١٢	١١٠٠
١٣	١١٠١
١٤	١١١٠
١٥	١١١١

من هذا المثال، نلاحظ بأننا استخدمنا خانة واحدة في أول الأمر ثم لمّا استنفذنا الخانة الأولى استخدمنا خانة ثانية وهكذا بالتدرج إلى أن نصل في الأخير إلى العدد ١١١١.

مثال ٤: حول الأعداد التالية من النظام الثنائي إلى النظام العشري:

$1)\ 1101101 \qquad 2)\ 0.1011 \qquad 3)\ 10.111$

الحل:

$$1)\ 1101101 = (1\times 2^0)+(0\times 2^1)+(1\times 2^2)+(1\times 2^3)+(0\times 2^4)+(1\times 2^5)+(1\times 2^6)$$
$$=1+0+4+8+0+32+64=109$$

$$2)\ 0.1011=(1\times 2^{-1})+(0\times 2^{-2})+(1\times 2^{-3})+(1\times 2^{-4})$$
$$=0.5+0+0.125+0.0625=0.6875$$

$$3)\ 10.111=(1\times 2^1)+(0\times 2^0)+(1\times 2^{-1})+(1\times 2^{-2})+(1\times 2^{-3})$$
$$=2+0+0.5+0.125+0.0625=2.6875$$

قاعدة التحويل لعدد صحيح من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

١) نقسم العدد على ٢ فنتحصل على باق هو رقم الخانة الأولى ابتداء من اليمين.

٢) نقسم ناتج القسمة السابقة على ٢ فنتحصل على باق هو رقم الخانة الثانية ابتداء من اليمين.

٣) وهكذا ونتوقف عندما نتحصل على ناتج قسمة هو ٠.

مثال ٥: حول الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

$1)\ 12 \qquad 2)\ 19 \qquad 3)\ 45$

الحل:

١) نقوم بالقسمة على ٢ ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفرا:

$\frac{12}{2}=6$ و الباقي هو 0

$\frac{6}{2}=3$ و الباقي هو 0

$\frac{3}{2}=1$ و الباقي هو 1

$\frac{1}{2}=0$ و الباقي هو 1

إذن ١٢ يكتب في النظام الثنائي: ١١٠٠

٢) نقوم بالقسمة على ٢ ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفرا:

$9=\frac{19}{2}$ و الباقي هو 1

$4=\frac{9}{2}$ و الباقي هو 1

$2=\frac{4}{2}$ و الباقي هو 0

$1=\frac{2}{2}$ و الباقي هو 0

$0=\frac{1}{2}$ و الباقي هو 1

إذن ١٩ يكتب في النظام الثنائي: ١٠٠١١

٣) نقوم بالقسمة على ٢ ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفرا:

$22=\frac{45}{2}$ و الباقي هو 1

$11=\frac{22}{2}$ و الباقي هو 0

$5=\frac{11}{2}$ و الباقي هو 1

$2=\frac{5}{2}$ و الباقي هو 1

$1=\frac{2}{2}$ و الباقي هو 0

$0=\frac{1}{2}$ و الباقي هو 1

إذن ٤٥ يكتب في النظام الثنائي: ١٠١١٠١.

قاعدة التحويل لعدد كسري من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

نجزئ العدد الكسري إلى جزئين: جزء صحيح ونحوّله كما هو موضح سابقا، وجزء كسري ونحوّله كما يلي:

١) نضرب العدد في ٢ فنتحصل على ناتج متكون من جزء صحيح، وهو رقم الخانة الأولى ابتداء من اليسار بعد النقطة الثنائية، وجزء كسري..

٢) نضرب الجزء الكسري من ناتج الضرب السابق في ٢ فنتحصل على ناتج متكون من جزء صحيح، وهو رقم الخانة الثانية ابتداء من اليسار بعد النقطة الثنائية، وجزء كسري..

٣) وهكذا نتوقف عندما نتحصل على جزء كسري لناتج الضرب هو ٠.

مثال ٦: حول الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

1) 0.625 2) 12.3125

الحل:

١) نقوم بالضرب في ٢ ونحتفظ بالأجزاء الصحيحة إلى أن يصبح الجزء الكسري للناتج صفرا:

$0.625 \times 2 = 1.25$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

$0.25 \times 2 = 0.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 0

$0.5 \times 2 = 1.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

نتوقف لأن الجزء الكسري للناتج هو ٠.

إذن العدد ٠,٦٢٥ يكتب في النظام الثنائي: ٠,١٠١ .

٢) نجزئ العدد إلى جزئين: الجزء الصحيح وهو ١٢، والجزء الكسري وهو ٠,٣١٢٥.

قد مر معنا في الفقرة ١ من المثال السابق بأن العدد ١٢ يكتب في النظام الثنائي ١١٠٠.

إذن بقي العدد ٠,٣١٢٥: نقوم بالضرب في ٢ ونحتفظ بالأجزاء الصحيحة إلى أن يصبح الجزء الكسري للناتج صفرا:

$0.3125 \times 2 = 0.625$ والجزء الصحيح للناتج هو 0

$0.625 \times 2 = 1.25$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

$0.25 \times 2 = 0.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 0

$0.5 \times 2 = 1.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

نتوقف لأن الجزء الكسري للناتج هو ٠.

إذن العدد ٠,٣١٢٥ يكتب في النظام الثنائي: ٠,٠١٠١ .

ومنه فالعدد ١٢,٣١٢٥ يكتب في النظام الثنائي: ١١٠٠,٠١٠١ .

٣. العمليات الحسابية في النظام الثنائي:

الجمع الثنائي:

نجمع الأعداد في النظام الثنائي كما نجمعها في النظام العشري مع احترام الخاصية التبديلية والقواعد الأساسية التالية:

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+1=10$$
$$1+0+0=01$$
$$1+1+0=10$$
$$1+1+1=11$$

مثال ٧: أدّ العمليات التالية في النظام الثنائي:

1) $11+11$ 2) $100+10$ 3) $111+11$ 4) $110+100$

الحل:

١) $11+11=110$ لأن:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 1\ \ } \\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0 \end{array}$$

٢) $100+10=110$ لأن:

$$\begin{array}{r} \underline{0\ 0\ \ } \\ 1\ 0\ 0 \\ +\ \ \ 1\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 0 \end{array}$$

٣) $111+11=1010$ لأن:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 1\ 1\ \ } \\ 1\ 1\ 1 \\ +\ \ \ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

٤) $110+100=1010$ لأن:

$$\begin{array}{r} \underline{1\ 0\ 0\ \ } \\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 0\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

الطرح الثنائي:

ما دمنا لم نعرّف كيفية كتابة الأعداد السالبة في النظام الثنائي بعد ، فيشترط لأداء عملية الطرح أن يكون المطروح منه أكبر من المطروح ويعرف هذا بعدد الخانات المخصصة لكل عدد.

مثال ٨: قارن بين الأعداد التالية المكتوبة في النظام الثنائي:

$$1101,\quad 1010.01,\quad 10000,\quad 0.010101$$

الحل:

$$10000 > 1101 > 1010.01 > 0.010101$$

طرح عدد من عدد أكبر منه في النظام الثنائي يشبه عملية الطرح في النظام العشري مع احترام القواعد الأساسية التالية:

$$\begin{aligned} 0-0&=0\\ 1-1&=0\\ 1-0&=1\\ 10-1&=1 \end{aligned}$$

مثال ٩: أدّ العمليات التالية في النظام الثنائي:

$$1)\,11-10 \qquad 2)\,101-11$$

الحل:

١) $11-10=1$ لأن:

$$\begin{array}{rrr} - & & \\ \hline & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

٢) $101-11=10$ لأن:

$$\begin{array}{rrrr} - & 1 & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 \\ - & & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

الضرب الثنائي:

نضرب الأعداد في النظام الثنائي كما نضربها في النظام العشري مع احترام الخاصية التبديلية والقواعد الأساسية التالية:

$$0\times 0=0$$
$$0\times 1=0$$
$$1\times 0=0$$
$$1\times 1=1$$

مثال١٠: أدّ العمليات التالية في النظام الثنائي:

$$1)\,11\times 11 \qquad 2)\,101\times 111 \qquad 3)\,1001\times 1011$$

الحل:

١) $11\times 11=1001$ لأن:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 1 & 1\\
\times & & & 1 & 1\\
\hline
 & & & 1 & 1\\
+ & & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

٢) $101\times 111=100011$ لأن:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 0 & 1\\
\times & & & 1 & 1 & 1\\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1\\
 & & 1 & 0 & 1 & \\
+ & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

٣) $1001\times 1011=1100011$ لأن:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & 0 & 0 & 1\\
\times & & & 1 & 0 & 1 & 1\\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 1\\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

القسمة الثنائية:

نقسم الأعداد في النظام الثنائي كما نقسمها في النظام العشري.

مثال ١١: أدّ العمليات التالية في النظام الثنائي:

$$1)\,110 \div 11 \qquad 2)\,110 \div 10$$

الحل:

١) $10 = 11 \div 110$ لأن:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 11\overline{)110} \\ \underline{11} \\ 000 \end{array}$$

٢) $11 = 10 \div 110$ لأن:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 10\overline{)110} \\ \underline{10} \\ 010 \\ \underline{10} \\ 00 \end{array}$$

٤. تمثيل الأعداد السالبة باستخدام النظام الثنائي:

نظرية ١: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 0 و 2^n-1 .

مثال ١٢: باستخدام ٨ خانات يسمح النظام الثنائي بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٠ و ٢٥٥.

وباستخدام ١٦ خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٠ و ٦٥٥٣٥.

كيف يمكن أن نمثل الأعداد السالبة؟

هناك عدة أنظمة متفرعة عن النظام الثنائي تسمح بتمثيل الأعداد بإشارتها سنتناول ثلاثة منها.

النظام الثنائي إشارة -سعة:

في هذا النظام، نخصص آخر خانة على اليسار لتمثيل الإشارة: ٠ للإشارة الموجبة و ١ للإشارة السالبة، وتخصص الخانات الأخرى لتمثيل العدد دون إشارته في النظام الثنائي.

مثال ١٣: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي إشارة -سعة باستخدام ٨ خانات:

$$1)\,19 \qquad 2)\,-19$$

الحل:

١) مرّ معنا في الفقرة ٢ من المثال ٥ أن العدد ١٩ يكتب في النظام الثنائي: ١٠٠١١.

ومنه ففي النظام الثنائي إشارة -سعة ذات ٨ خانات يكتب: ٠٠٠١٠٠١١.

٢) ومنه فالعدد -19 يكتب في النظام الثنائي إشارة -سعة كما يلي: ١٠٠١٠٠١١.

مثال ١٤: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي إشارة -سعة إلى النظام العشري:

$$1)\,10010 \qquad 2)\,00101$$

الحل:

$$1)\,10010 = -(2^1) = -2$$
$$2)\,00101 = +(2^2 + 2^0) = 5$$

نظرية ٢: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي إشارة -سعة بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين $-2^{n-1}+1$ و $2^{n-1}-1$.

مثال ١٥: باستخدام ٨ خانات يسمح النظام الثنائي إشارة -سعة بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين -127 و 127.

وباستخدام ١٦ خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين -32767 و 32767.

النظام الثنائي متمم ١:

في هذا النظام تمثل الأعداد الموجبة كما تمثل في النظام الثنائي إشارة -سعة بينما تمثل الأعداد السالبة بأخذ متمم تمثيل الأعداد الموجبة الموافقة لها، أي بتعويض ٠ بـ ١ والعكس.

مثال ١٦: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي متمم ١ ذات ٨ خانات:

$$1)\,19 \qquad 2)\,-19$$

الحل:

١) مرّ معنا في الفقرة ١ من المثال ١٣ بأن العدد 19 يكتب في النظام الثنائي إشارة -سعة ذات ٨ خانات كما يلي: 00010011 وهي الكتابة نفسها في النظام الثنائي متمم ١.

٢) للحصول على كتابة العدد -19 في النظام الثنائي متمم ١، نقوم بإتمام 00010011 إلى ١ فنتحصل على: 11101100 .

مثال ١٧: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي متمم ١ إلى النظام العشري:

$$1)\,00010111 \qquad 2)\,11101000$$

الحل:

$$1)\,00010111 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 16 = 23$$

$$2)\,11101000 = -(00010111) = -(2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = -(16 + 4 + 2 + 1) = -23$$

نظرية ٣: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي متمم ١ بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين $-2^{n-1}+1$ و $2^{n-1}-1$.

مثال ١٨: باستخدام ٨ خانات يسمح النظام الثنائي متمم ١ بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين -127 و 127.

وباستخدام ١٦ خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين -32767 و 32767.

النظام الثنائي متمم ٢:

في هذا النظام تمثل الأعداد الموجبة كما تمثل في النظام الثنائي إشارة -سعة بينما تمثل الأعداد السالبة بأخذ متمم تمثيل الأعداد الموجبة الموافقة لها، أي بتعويض ٠ بـ ١ والعكس ثم إضافة ١ إلى التمثيل المتحصل عليه.

مثال١٩: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي متمم ٢ ذات ٨ خانات:

$$1)\,19 \qquad 2)\,-19$$

الحل:

١) مرّ معنا في الفقرة ١ من المثال ١٣ بأن العدد 19 يكتب في النظام الثنائي إشارة -سعة ذات ٨ خانات كما يلي: 00010011 وهي الكتابة نفسها في النظام الثنائي متمم ٢.

٢) للحصول على كتابة العدد 19- في النظام الثنائي متمم ٢، نقوم بإتمام 00010011 إلى ١ فنتحصل على: 11101100 ثم نضيف 1 فينتج: 11101101

ومنه فتكون أوزان الخانات في هذا النظام كما يلي (ذات ٨ خانات):

$$2^0,\quad 2^1,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad 2^5,\quad 2^6,\quad -2^7$$

مثال٢٠: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي متمم ٢ إلى النظام العشري:

$$1)\,01010110 \qquad 2)\,10101010$$

الحل:

$$1)\,01010110 = 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = 2+4+16+64 = 86$$
$$2)\,10101010 = 2^1 + 2^3 + 2^5 - 2^7 = 2+8+32-128 = -86$$

نظرية٤: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي متمم ١ بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين -2^{n-1} و $2^{n-1}-1$.

مثال٢١: باستخدام ٨ خانات يسمح النظام الثنائي متمم ١ بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 128- و 127.

وباستخدام ١٦ خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 32768- و 32767.

ومن الأنظمة الثنائية المتفرعة لتمثيل الأعداد السالبة فإن النظام الثنائي متمم ٢ هو الأكثر استعمالا في الحاسوبات لأسباب كثيرة من بينها سهولة العمليات الحسابية وعدم تمثيل الصفر بأكثر من كتابة كما هو الحال بالنسبة للنظام الثنائي متمم ١ إذ يمكن تمثيل الصفر فيه بطريقتين هما:

$$00000000,\quad 11111111$$

وكذلك بالنسبة للنظام الثنائي إشارة -سعة:

$$00000000,\quad 10000000$$

٥. النظام الستعشري:

النظام الستعشري هو طريقة أخرى لتمثيل الأعداد نستخدم فيه ستة عشر رقما هي:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*

وتكون أوزان الخانات هي قوى ١٦ (أي ١٦ أس عدد صحيح).

ومن فوائده: تسهيل قراءة الأعداد الممثلة في النظام الثنائي.

مثال٢٢: يعطينا الجدول التالي القيم الموافقة في كل من النظام العشري والثنائي لأرقام النظام الستعشري:

العشري	الثنائي	الستعشري
٠	٠٠٠٠	٠
١	٠٠٠١	١
٢	٠٠١٠	٢
٣	٠٠١١	٣
٤	٠١٠٠	٤
٥	٠١٠١	٥
٦	٠١١٠	٦
٧	٠١١١	٧
٨	١٠٠٠	٨
٩	١٠٠١	٩
١٠	١٠١٠	*A*
١١	١٠١١	*B*
١٢	١١٠٠	*C*
١٣	١١٠١	*D*
١٤	١١١٠	*E*
١٥	١١١١	*F*

قاعدة التحويل لعدد صحيح من النظام الثنائي إلى النظام الستعشري:

١) نضيف أصفارا على اليسار حتى يصبح عدد الخانات مضاعفا لـ ٤.

٢) نقسم العدد إلى مجموعات متكونة من ٤ خانات ابتداء من اليمين.

٣) نحوّل كل مجموعة إلى الرقم الموافق في النظام الستعشري.

مثال ٢٣: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي إلى النظام الستعشري:

$$1)\ 1100101001010111 \qquad 2)\ 111111000101101001$$

الحل:

$$1)\ 1100101001010111 = 1100 \quad 1010 \quad 0101 \quad 0111 = CA57_{16}$$
$$2)\ 111111000101101001 = 11 \quad 1111 \quad 0001 \quad 0110 \quad 1001$$
$$= 0011 \quad 1111 \quad 0001 \quad 0110 \quad 1001 = 3F169_{16}$$

قاعدة التحويل لعدد صحيح من النظام الستعشري إلى النظام الثنائي:

١) نحوّل كل رقم إلى الرقم الموافق ذي ٤ خانات.

٢) نحذف الأصفار على اليسار إن لم نحتج إليها.

مثال ٢٤: حوّل الأعداد التالية من النظام الستعشري إلى النظام الثنائي:

$$1)\ 10A4_{16} \qquad 2)\ CF8E_{16} \qquad 3)\ 9742_{16}$$

الحل:

$$1)\ 10A4_{16} = 0001 \quad 0000 \quad 1010 \quad 0100 = 1000010100100$$
$$2)\ CF8E_{16} = 1100 \quad 1111 \quad 1000 \quad 1110 = 1100111110001110$$
$$3)\ 9742_{16} = 1001 \quad 0111 \quad 0100 \quad 0010 = 1001011101000010$$

أما بالنسبة للتحويل من النظام الستعشري إلى النظام العشري والعكس فيمكن استخدام طريقة مماثلة لما رأيناه في حالة النظام الثنائي أو المرور عن طريق النظام الثنائي.

مثال ٢٥: حوّل الأعداد التالية من النظام الستعشري إلى النظام العشري:

$$1)\ 1C_{16} \qquad 2)\ A85_{16}$$

الحل:

$$1)\ 1C_{16} = 0001 \quad 1100 = 11100 = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$$
$$2)\ A85_{16} = 1010 \quad 1000 \quad 0101 = 101010000101 = 2^0 + 2^2 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} = 2693$$

طريقة أخرى للحل:

$$1)\ 1C_{16} = (1 \times 16^1) + (12 \times 16^0) = 16 + 12 = 28$$
$$2)\ A85_{16} = (10 \times 16^2) + (8 \times 16^1) + (5 \times 16^0) = 2560 + 128 + 5 = 2693$$

مثال ٢٦: حوّل العدد التالي من النظام العشري إلى النظام الستعشري: 650

الحل:

نقوم بالقسمة على ١٦ ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفرا :

$\frac{650}{16} = 40$ و الباقي هو $10 = A$

$\frac{40}{16} = 2$ و الباقي هو 8

$\frac{2}{16} = 0$ و الباقي هو 2

إذن 650 يكتب في النظام الستعشري: $28A_{16}$

تمارين

تمرين ١: ما هو وزن الرقم ٦ في كل من الأعداد العشرية التالية:

1) 1386 2) 54692 = 54,692 3) 671920 = 671,920 4) 13.564

تمرين ٢: اكتب كلا من الأعداد العشرية التالية على شكل قوى ١٠:

1) 10 2) 100 3) 10,000 4) 1,000,000 5) 0.001

تمرين ٣: ما هو أكبر عدد عشري يمكن كتابته باستخدام ٤ خانات؟

تمرين ٤: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى عشرية:

1) 11 2) 100 3) 111 4) 1000 5) 1001 6) 1100

تمرين ٥: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى عشرية:

1) 110011.11 2) 101010.01 3) 1000001.111 4) 1011010.1010

تمرين ٦: ما هو أكبر عدد عشري يمكن كتابته في النظام الثنائي باستخدام:

١) خانتين؟ ٢) ٣ خانات؟ ٣) ٤ خانات؟ ٤) ١٠ خانات؟ ٥) ١١ خانة؟

تمرين ٧: كم خانة نحتاج لتمثيل الأعداد العشرية التالية في النظام الثنائي؟

1) 17 2) 35 3) 49 4) 68 5) 81 6) 205

تمرين ٨: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ثنائية:

1) 10 2) 17 3) 24 4) 48 5) 125 6) 186

تمرين ٩: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ثنائية:

1) 0.32 2) 0.246 3) 0.0981 4) 12.34

تمرين ١٠: أدّ العمليات الثنائية التالية:

1) $11+1$ 2) $10+10$ 3) $101+11$ 4) $111+110$ 5) $1101+1011$

تمرين ١١: أدّ العمليات الثنائية التالية:

1) $11-1$ 2) $101-100$ 3) $110-101$ 4) $1110-11$ 5) $11010-10111$

تمرين ١٢: أدّ العمليات الثنائية التالية:

1) 11×11 2) 100×10 3) 111×101 4) 1001×110 5) 1110×1101

تمرين ١٣: أدّ العمليات الثنائية التالية:

1) $100\div10$ 2) $1001\div11$ 3) $1100\div100$

تمرين ١٤: استخدم كلا من الأنظمة الثنائية المتفرعة ذات ٨ خانات (لتمثيل الأعداد السالبة) لكتابة الأعداد العشرية التالية:

$1)\ -29 \quad 2)\ -85 \quad 3)\ 100 \quad 4)\ -123 \quad 5)\ -99 \quad 6)\ 57$

تمرين ١٥: حوّل الأعداد الثنائية التالية من كل من الأنظمة المتفرعة إلى أعداد عشرية:

$1)\ 10011001 \quad 2)\ 01110100 \quad 3)\ 10111111 \quad 4)\ 01110100$

تمرين ١٦: حوّل الأعداد الستعشرية التالية إلى ثنائية:

$1)\ 59_{16} \quad 2)\ A14_{16} \quad 3)\ 5C8_{16} \quad 4)\ 8A9D_{16}$

تمرين ١٧: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى ستعشرية:

$1)\ 1110 \quad 2)\ 10 \quad 3)\ 10111 \quad 4)\ 1111110000$

تمرين ١٨: حوّل الأعداد الستعشرية التالية إلى عشرية:

$1)\ 59_{16} \quad 2)\ A14_{16} \quad 3)\ 5C8_{16} \quad 4)\ 8A9D_{16}$

تمرين ١٩: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ستعشرية:

$1)\ 8 \quad 2)\ 14 \quad 3)\ 33 \quad 4)\ 6500$

رياضيات الحاسب

التعبيرات المنطقية والعمليات عليها

التعبيرات المنطقية والعمليات عليها

٢

الجدارة: معرفة مفهوم التعبيرات المنطقية والعمليات عليها والقدرة على تقييمها من حيث الصحة أو الخطأ...

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- تكوين مفهوم التعبيرات المنطقية البسيطة والمركبة.
- اجراء العمليات المنطقية الأساسية؛
- تكوين جدول الحقائق وبعض أنواع التعبيرات الهامة.
- استخدام بعض القوانين المنطقية الهامة.
- تكوين العبارات المنطقية المشروطة.

الوقت المتوقع للتدريب: سبع ساعات.

التعبيرات المنطقية والعمليات عليها

١. مقدمة

عند استعمال الكلمات وحدها للتعبير عن فكرة معينة هناك، حتمال عدم وضوح هذه الفكرة لأن الكلمات عادة ما تكون لها أكثر من معنى واحد. أما الرموز فهي مبهمة وحيادية. فإذن عند فشلنا في استخدام الطرق العادية لإيصال فكرة معينة يمكننا استخدام المنطق الرياضي (أو الرموز المنطقية) للوصول إلى طرح الفكرة بوضوح.

في علم الحاسب نستعمل هذه الرموز لتركيب جملة نسميها في هذا الباب **عبارة منطقية**. ومن الضروري معرفة الحالات التي تكون فيها هذه التعبيرات إما **صحيحة** $(T : True)$ أو **خاطئة** $(F : False)$. صحة أو خطأ هذه العبارة عادة ما تسمى **قيمة الصدق**.

٢. التعبيرات والتعبيرات المركبة

العبارة المنطقية هي جملة خبرية تكون إما صحيحة أو خاطئة ولكن ليست صحيحة وخاطئة في نفس الوقت. فمثلا لتكن لدينا الجمل الآتية:

مثال ١:

a) هذا الثوب أبيض
b) مجموع الزوايا الداخلية لمثلث ما يساوي 180°
c) $4 \div 2 = 1$
d) $x = 3$ هو حل للمعادلة: $x^2 = 16$
e) إلى أين أنت ذاهب؟
f) قم بواجبك من فضلك.

نلاحظ في هذا المثال أن الجمل الأربعة الأولى هي جمل خبرية يمكن الإجابة عليها بخطأ أو صح، فهذه الجمل نعتبرها تعبيرات منطقية. أما الجملتين الأخيرتين فهي ليست خبرية ولا نستطيع الإجابة عليها بخطأ أو صح، إذن لا نعتبرها رياضيا تعبيرات منطقية.

كثير من التعبيرات المنطقية تكون مركبة أي أنها تكون مركبة من تعبيرات جزئية بسيطة متصلة **بروابط** مختلفة. وتسمى العبارة عبارة بدائية إذا كان غير ممكن تجزئتها إلى تعبيرات بسيطة.

مثال ٢: لتكن لدينا الجمل التالية:

a) عمر طالب مجتهد وناصر طالب ذكي
b) الشكل $ABCD$ مربع وطول كل ضلع فيه يساوي $4cm$
c) الورد أحمر والبنفسج أزرق

الجمل الثلاث المذكورة في هذا المثال تعتبر كلها تعبيرات مركبة، فمثلا العبارة الأول مركبة من التعبيرات الجزئية البسيطة التالية: "عمر طالب مجتهد" و "ناصر طالب ذكي". في العبارة الثانية: "الشكل $ABCD$ مربع" و "طول ضلعه $4cm$" وفي العبارة الأخيرة: "الورد أحمر" و "البنفسج أزرق".

تحديد قيمة الصدق لعبارة مركبة مرتبط بقيمة الصدق للتعبيرات الجزئية الموجودة فيها مع الروابط التي استخدمت في تكوين هذه العبارة المركبة.

إذاً سنتطرق فيما يلي إلى طريقة الوصول إلى قيمة الصدق للتعبيرات المركبة مع الإشارة إلى أننا سنستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة $p , q , r , s.....$ لنرمز إلى التعبيرات البسيطة الجزئية.

٣. العمليات المنطقية الأساسية

سندرس في هذا الفصل العمليات الأساسية الثلاثة التالية:

- رابط العطف $(conjunction)$: "و" "and" ورمزه: $\wedge$
- رابط التخيير $(disjunction)$: "أو" "or" ورمزه: $\vee$
- رابط النفي $(negation)$: "غير صحيح أن ...." "not" ورمزه: $\neg$

١,٣. **العطف** $p \wedge q$

يمكننا الحصول على عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين مربوطتين برابط العطف "و" ("and"). ونرمز لهذه العبارة الجديدة كالتالي: $p \wedge q$

وتقرأ " p و q". قيمة الصدق للعبارة $p \wedge q$ تعتمد على قيمة الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p و q. تكون العبارة $p \wedge q$ صحيحة في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون p و q صحيحين في نفس الوقت، ويكون $p \wedge q$ خطأ في كل الحالات الأخرى. يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \wedge q$ في جدول عادة ما نسميه جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول1.

فمثلا نفهم من الصف الأول في الجدول أنه إذا كان p صحيحا و q صحيحا فإن $p \wedge q$ صحيحا، وأما في الصف الثاني من الجدول نفهم أنه إذا كان p صحيحا و q خطأ فإن $p \wedge q$ يكون خطأ وهكذا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول 1

نلاحظ أن هناك أربعة صفوف تغطي الحالات الأربعة الممكنة للصحة (T) والخطأ (F) لكل من التعبيرات الجزئية p و q ، كما نلاحظ أيضا أن $p \wedge q$ يكون صحيحا إذا وإذا فقط كان كل من p و q صحيحا.

مثال٣: لتكن لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

a) الرياض عاصمة المملكة وجدة مدينة من مدن المملكة

b) الرياض عاصمة المملكة و $4+2=7$

c) جدة عاصمة المملكة و 6 يقبل القسمة على ٢

d) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي

ففي هذا المثال فقط العبارة الأولى صحيحة لأن التعبيرات الجزئية فيها صحيحة، أما باقي التعبيرات فكلها خطأ لأن على الأقل واحد من التعبيرات الجزئية خطأ.

٢,٣. التخيير $p \vee q$

يمكننا الحصول على عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين مربوطتين برابط العطف "أو" ("or"). ويرمز لهذا العبارة الجديدة كالتالي: $p \vee q$

وتقرأ " p أو q". قيمة الصدق للعبارة $p \vee q$ تعتمد على قيم الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p و q. تكون العبارة $p \vee q$ صحيحة إذا كان أحد أو كلا من التعبيرات الجزئية p و q صحيحة، وتكون $p \vee q$ خطأ في حالة واحدة وهي عندما يكون p و q خطأ في نفس الوقت.

يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \vee q$ في جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 2.

فمن الجدول واضح أن $p \vee q$ دائما صحيحة إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون فيها p و q خطأ في نفس الوقت.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول ٢

مثال٤: لتكن لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

a) الرياض عاصمة المملكة أوجدة مدينة من مدن المملكة

b) الرياض عاصمة المملكة أو $7 = 2 + 4$

c) جدة عاصمة المملكة أو 6 يقبل القسمة على ٢

d) عدد أيام الأسبوع 6 أو 0 عدد طبيعي

في هذا المثال فقط العبارة الرابعة خطأ وباقي التعبيرات كل واحد منها صحيحة إذ أن على الأقل أحد التعبيرات الجزئية صحيحة.

ملاحظة

تستخدم كلمة "أو" في اللغة بطريقتين مختلفتين. أحيانا تستخدم كلمة أو بمفهومها الشامل أي أن "p أو q" يعني إما p أو q أو كليهما معا، بمعنى آخر أن على الأقل أحد البديلين يحدث. كما أن كلمة "أو" تستخدم بمفهومها الاستثنائي أي أن "p أو q" يعني إما p يحدث أو q يحدث وليس كليهما معا، بمعنى آخر فقط واحد من البديلين يحدث. فمثلا في الجملة "الخطوط L_1 و L_2 متوازيان أو متقاطعان تستخدم "أو" بالمعنى الثاني (الاستثنائي).

سوف نستخدم الرابط "أو" بالمعنى الأول في هذه الوحدة إلا إذا ذكر خلاف ذلك. إذن تعرّف $p \vee q$ على أنها دائما تعني "p و | أو q".

٣,٣. النفي $\neg p$

يمكن الحصول على عبارة جديدة من عبارة ما بإدخال صيغة النفي عليها. ويتم ذلك بإضافة الكلمات "غير صحيح أن ......" قبل العبارة، وباستخدام الرموز إذا كانت العبارة هي p فإن نفيها يكتب: $\neg p$. وتقرأ نفي p . قيمة صدق $\neg p$ تعتمد على قيمة صدق p ، فإذا كان p صحيح يكون $\neg p$ خطأ وإذا كان p خطأ يكون $\neg p$ صحيح فبالتالي يكون جدول الصدق كما يلي:

p	$\neg p$
T	F
F	T

مثال ٥ : لتكن لدينا التعبيرات التالية :

a) الباب مغلق

b) هذا الثوب أبيض

c) كل الطلاب أذكياء

لنفي العبارة الأولى نقول: "غير صحيح أن الباب مغلق" أو ممكن أن نقول "الباب ليس مغلقا". وفي العبارة الثانية نقول: "غير صحيح أن هذا الثوب أبيض" أو نقول "هذا الثوب ليس أبيضا". وفي العبارة الثالثة نقول: "غير صحيح أن كل الطلاب أذكياء" ولكن من الخطأ أن نقول: "كل الطلاب أغبياء" لأن هذا ليس نفيا للعبارة كما عرفناه.

ملاحظة

ليس من الضروري أن تحتوي التعبيرات المركبة على عبارتين جزئيتين p و q فقط، وإنما يمكن الحصول على عبارة مركبة من عدة عبارات جزئية وعدة روابط متكررة ولكن في هذه الوحدة سنكتفي بإعطاء التعبيرات المركبة من ثلاثة عبارات جزئية كحد أقصى. في حالة وجود ثلاثة عبارات جزئية p , q , r يصبح جدول الحقائق يحتوي على ثمانية صفوف لكي نغطي كل الحالات الممكنة كالتالي:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

٤,٣. التعبيرات وجدول الحقائق

ليكن $P(p,q,r...)$ هو الرمز لعبارة مركبة من عدد من التعبيرات الجزئية المنطقية $p\ ,\ q\ ,\ r...$ (المتغيرات) وعدد من الروابط المنطقية $\neg\ ,\ \vee\ ,\ \wedge$ (وأخرى سنتطرق إليها لاحقا). قيم الصدق لهذه العبارة المركبة تعتمد أساسا على قيم الصدق للمتغيرات الموجودة فيها ، أي أن قيم الصدق للعبارة المركبة تعرف عند معرفة قيم الصدق للمتغيرات. الطريقة الأسهل والأسرع لتوضيح هذه العلاقة بين قيم الصدق للعبارة المركبة وقيم الصدق للمتغيرات هو من خلال جدول الحقائق أو الصدق كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٦ : أوجد جدول الصدق للعبارة المركبة التالية : $\neg(p\wedge\neg q)$

الحل:

يكون جدول الصدق كالتالي:

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

لاحظ أن الأعمدة الأولى مخصصة للمتغيرات p و q ، وأن هناك عدد كاف من الصفوف لتغطية جميع الحالات الممكنة من صحيح(T) وخطأ (F) لهذه المتغيرات. ثم بعد ذلك نقوم بملء الأعمدة المتتالية التي تمثل المراحل البسيطة في تكوين العبارة المركبة. تحدد قيم الصدق في كل مرحلة من قيم الصدق في المراحل السابقة على حسب الروابط $\neg\ ,\ \vee\ ,\ \wedge$ المستخدمة. وأخيرا نحصل على قيم الصدق للعبارة المركبة التي تظهر في العمود الأخير.

ويجب أن نلاحظ كذلك أن جدول الحقائق الفعلي للعبارة $\neg(p\wedge\neg q)$ يتكون فقط من عمودي المتغيرين p و q والعمود الأخير، أما الأعمدة الباقية فقد استخدمناها كمراحل للوصول إلى الحل. فإذن النتيجة تختصر فقط إلى جدول الحقائق التالي:

p	q	$\neg(p\wedge\neg q)$
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظة

لكي نتجنب استخدام عدد كبير من الأقواس عادة ما نتبع ترتيب معين لحساب الروابط كالتالي:

عملية النفي $(\neg)$ تسبق عملية العطف $(\wedge)$ والتي تسبق عملية التخيير $(\vee)$.

فمثلا $\neg p\wedge q$ يعني $(\neg p)\wedge q$ وليس $\neg(p\wedge q)$

٥،٣. التوافق والتناقض

عادة ما تكون العبارة تحتوي فقط صحيح(T) في كل الحالات، أي أن العمود الأخير (أو النتيجة) تكون دائما صح لأية قيم صدق المتغيرات، ففي هذه الحالة نسمي العبارة **توافق** أي أنها دائما صحيحة.

وعكس ذلك أي عندما تكون النتيجة دائما خاطئة (F) (أي أن العمود الأخير يحتوي فقط على (F)) فنقول أن العبارة **تناقض**.

مثال ٧: بَيِّن أن: $b)\ p \wedge q \wedge \neg(p \vee q)$ تناقض $a)\ \neg p \vee (p \vee q)$ توافق

الحل:

a) نقوم بحساب جدول الحقائق كما رأينا في السابق:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \vee (p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

إذن نلاحظ أن $\neg p \vee (p \vee q)$ دائما صحيح (T) وذلك في كل الحالات، فنستنتج أنها توافق ونكتب:

$$\neg p \vee (p \vee q) \equiv T$$

(سنتطرق للرمز ≡ في الفقرة الآتية)

b) بنفس الطريقة نحسب جدول الحقائق كالتالي:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

فهنا نلاحظ أن $p \wedge q \wedge \neg(p \vee q)$ تحتوي فقط على (F)، فإذن العبارة تناقض، ونكتب:

$$p \wedge q \wedge \neg(p \vee q) \equiv F$$

٦،٣. التكافؤ المنطقي

نقول على عبارتين أنهما متكافئتان منطقيا (أو فقط متساويتان) إذا كان جدولا الصدق لهما متطابقين، ونرمز لهذا التطابق كالتالي: $P(p,q...) \equiv Q(p,q...)$ (إذن≡ هو رمز التطابق).

مثال ٨: باستخدام جدول الحقائق بين التطابق التالي: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

الحل: نحسب جدول الحقائق للعبارتين كالتالي:

نلاحظ أن العمود الأخير لكل من $\neg(p \wedge q)$ و $\neg p \vee \neg q$ متطابقان إذن:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

٧,٣. جبر التعبيرات

لتكن التعبيرات الجزئية العشوائية p, q, r ، فالتطابقات التالية الموجودة في الجدول الآتي هي قوانين جبرية يمكن الوصول إليها باستخدام جدول الحقائق.

٥) قوانين المحايد $a)\ p \vee T \equiv T \quad b)\ p \vee F \equiv p$ $c)\ p \wedge F \equiv F \quad d)\ p \wedge T \equiv p$		١) قوانين الإبدال $a)\ p \vee q \equiv q \vee p$ $b)\ p \wedge q \equiv q \wedge p$
٦) قوانين المتمم $a)\ p \vee \neg p \equiv T \quad b)\ p \wedge \neg p \equiv F$ $c)\ \neg T \equiv F \quad c)\ \neg F \equiv T$		٢) قوانين التجميع $a)\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $b)\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
٧) قانون متمم المتمم $\neg\neg p \equiv p$		٣) قوانين التوزيع $a)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $b) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
٨) قوانين دي مورجان $a)\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $b)\ \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$		٤) قوانين اللانمو $a)\ p \vee p \equiv p$ $b)\ p \wedge p \equiv p$

مثال ٨:

كمثال سنقوم ببيان القانون $(2a)$ (قانون التجميع) باستخدام جدول الحقائق ونترك برهان باقي القوانين كتمارين للطالب.

نلاحظ أن قيم صدق $(p \vee q) \vee r$ الموجودة في العمود الخامس وقيم صدق $p \vee (q \vee r)$ في العمود السابع متطابقة، إذن نستنتج أن:

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

مثال ٩: باستخدام جدول الحقائق بين أن: $(p \wedge q) \vee p \equiv p$ (قانون الامتصاص)

الحل:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ أن العمود الأول (أي p) مطابق للعمود الأخير (أي $((p \wedge q) \vee p)$ ، إذاً: $(p \wedge q) \vee p \equiv p$

ونسمي هذا القانون قانون الامتصاص. وبنفس الطريقة ممكن أن نصل إلى أن: $(p \vee q) \wedge p \equiv p$

رأينا في الأمثلة السابقة كيفية استخدام جدول الحقائق لبيان قانون التجميع والامتصاص. أما في المثال الذي يلي سنرى كيف نستخدم هذه القوانين في بيان تطابقات أخرى.

مثال ١٠: باستخدام قوانين جبر التعبيرات بين ما يلي:

$a)\ \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$ $\qquad$ $b)\ \{(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\} \vee q \equiv T$

الحل:

$a)$

السبب	مراحل الحل
قانون دي مورجان (٨a)	$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
قانون التوزيع (٣b)	$\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q)$
قانون المتمم (٦a)	$\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q)$
قانون المحايد (٥d)	$\equiv \neg p \wedge T$
	$\equiv \neg p$

$b)$

السبب	مراحل الحل
قانون التوزيع (٣a)	$\{(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\} \vee q \equiv \{\neg q \vee (p \wedge \neg p)\} \vee q$
قانون المتمم (٦b)	$\equiv \{\neg q \vee F\} \vee q$
قانون المحايد (٥b)	$\equiv \neg q \vee q$
قانون المتمم (٦a)	$\equiv T$

يمكننا كذلك استخدام القوانين السابقة لاختصار التعبيرات المركبة إلى تعبيرات بسيطة كما هو موضح في المثال التالي

مثال١٢: اختصر ما يلي: $(1) \quad (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q)$

الحل:

السبب	مراحل الحل
قانون دي مورجان (٨a)	$(1) \quad \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [\neg p \wedge (q \wedge r)] \vee (\neg p \wedge q)$
قانون التوزيع (٣b)	$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee [\neg p \wedge ((q \wedge r) \vee q)]$
قانون الامتصاص (**مثال٩**)	$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
قانون التوزيع (٣b)	$\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q)$
قانون المتمم (٦a)	$\equiv \neg p \wedge T$
قانون المحايد (٥d)	$\equiv \neg p$

٨,٣. التعبيرات المشروطة وثنائية الشروط

a) العبارة المشروطة

العبارة التي تكون على شكل "إذا كان p فإن q" $(if\ p\ then\ q)$ حيث p و q تعبيرات جزئية، تسمى عبارة مشروطة ويرمز لها كالتالي: $p \to q$. العبارة المشروطة $p \to q$ عادة كذلك ما تقرأ "p يستوجب q" أو تقرأ "p فقط إذا q".

يكون جدول الصدق للعبارة الشرطية كالتالي:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

هذا يعني أن $p \to q$ خطأ إذا وفقط إذا كان q خطأ و p صحيح، وفي باقي الحالات تكون دائما صحيحة. في هذا الجدول يمكن للطالب أن يستوعب نتائج الصف الأول والثاني بسهولة، أما نتائج الصف الثالث والرابع يمكن أن تشكل بعض الغموض للطالب. وهذا الغموض ناتج من أننا عادة لما نستخدم عبارة على شكل "إذا كان p فإن q" نستنتج تلقائيا أن p صحيح وأن التعبيرات p و q مرتبطة، ولكن هذا الاستنتاج غير صحيح في هذه الحالة كما سنرى مما يلي:

مثال ١٣: لتكن التعبيرات التالية: q: الزوايا المتقابلة متساوية p: خط عرضي يقطع خطين متوازيين

$p \to q$: إذا قطع خط عرضي خطين متوازيين فإذن الزوايا المتقابلة تكون متساوية في هذه الحالة p صحيحة و p و q مرتبطين.

لكن في الرياضيات المنطقية يجب أن نأخذ بعين الاعتبار الحالة التي لا ينطبق عليها أحد أو كل هذه القيود كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ١٤: لتكن التعبيرات التالية: $q:\ 3+5=8$ $p:\ 3=8$

$p \to q$: إذا كان $3=8$ فإن $3+5=8$

هنا $p \to q$ صحيحة لأن العبارة المستنتجة q صحيحة رغم أن p خطأ. إذن ليس هناك ربط منطقي بين p و q أو بمعنى آخر لا يمكن استنتاج q من p .

مثال ١٥: لتكن التعبيرات التالية: $q: 4 \div 2 = 3$ p: يحتوي المثلث على أربعة أضلع

$p \to q$: إذا كان المثلث يحتوي على أربعة أضلع فإن $4 \div 2 = 3$

هنا p و q كلاهما خطأ ومن الواضح أنهما منطقيا غير مرتبطين لكن العبارة المشروطة $p \to q$ تعتبر صحيحة في منطق الرياضيات.

يمكننا استبدال الرابط الشرطي $(\to)$ برابط التخيير $(\vee)$ كالتالي: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

ويمكن التأكد من هذه النتيجة بحساب جدول الصدق لكل التعبيرات كالتالي:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

فإذن واضح من العمود الثالث و الأخير أن:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

بمعنى آخر أن"إذا p فإن q" تكافئ "نفي p أو q".

مثال ١٦: قارن بين التعبيرات التالية:

$$p \to q \,,\, q \to p \,,\, \neg p \to \neg q \,,\, \neg q \to \neg p$$

الحل:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

من هذا الجدول نستنتج أن:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

$$q \to p \equiv \neg p \to \neg q$$

عادة ما نسمي:

$q \to p$ مقلوب و $\neg p \to \neg q$ معكوس و $\neg q \to \neg p$ مقلوب المعكوس العبارة المشروطة $p \to q$

سنرى في المثال التالي أنه إذا كان $p \to q$ صحيح فليس من الضروري أن يكون $q \to p$ و $\neg p \to \neg q$ كلاهما صحيح.

مثال ١٧: ليكن: $q{:}\,|x|<4$ و $p{:}\,x^2=4$. في هذه الحالة:

$p \to q$: إذا كان $x^2=4$ (يعني $x=\pm 2$) فإن $|x|<4$ وهذا صحيح.

$q \to p$: إذا كان $|x|<4$ فإن $x^2=4$ وهذا غير صحيح، أمثلة على ذلك $x=1$ أو $x=-3$

$\neg p \to \neg q$: إذا كان $x^2 \neq 4$ فإن $|x| \geq 4$ وهذا كذلك غير صحيح، أمثلة على ذلك $x=1$ أو $x=-3$

ملاحظة

يكون جدول الصدق لنفي العبارة المشروطة كالتالي:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

ولقد علمنا من قبل أن: $p \to q \equiv \neg p \vee q$ إذاً باستخدام قانون دي موجان يكون لدينا:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$$

b) **العبارة الثنائية الشروط**

هناك كذلك عبارة عادة ما نستخدمها كثيرا في الاستنتاجات الرياضية والتي تكون على شكل " p إذا وفقط إذا q" ويرمز لها كالتالي: $p \leftrightarrow q$.

تكون هذه العبارة المزدوجة الشروط صحيحة كلما كان كل من p و q صحيح أو خطأ في نفس الوقت. وتكون خاطئة في الحالات الباقية كما موضح في جدول الصدق التالي:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

وباستخدام جدول الصدق يمكننا الوصول إلى أن:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

(نترك بيان هذا التطابق كتمرين يقوم به الطالب)

٩,٣. القياس

القياس هو عبارة عن علاقة بين مجموعة من التعبيرات $P_1, P_2, ...P_n$ والتي تسمى المقدمات أو المجال وعبارة أخرى Q تسمى الاستنتاج، ونرمز للقياس كالتالي:

$$P_1, P_2, ...P_n \mapsto Q$$

يكون القياس $P_1, P_2, ...P_n \mapsto Q$ منطقيا أو مقبولا (أو فقط صحيحا) إذا كانت النتيجة (Q) صحيحة كلما كانت جميع المقدمات $P_1, P_2, ...P_n$ صحيحة، ويكون غير منطقيا أو مغالطا (أو فقط خطأ) في الحالات الأخرى.

مثال ١٨: بيّن أن القياسات التالية:

a) $p, p \to q \mapsto q$ منطقي (أو صحيح) $\qquad$ b) $p \to q, q \mapsto p$ مغالط (أو خطأ)

الحل:

a) نلاحظ هنا أن لدينا مقدمتين وهما p و $p \to q$ فلكي يكون القياس صحيحا يجب أن تكون النتيجة وهي q صحيحة في كل الحالات التي تكون فيها المقدمتان صحيحتان. ولكي نتأكد من هذا يجب أن نحسب جدول الصدق لهذا القياس كالتالي:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

إذن من الجدول نلاحظ أن المقدمتين تكونان صحيحتين فقط في حالة واحدة وهي موجودة في الصف الأول، إذن يجب أن تكون النتيجة والتي هي العبارة q صحيحة كذلك في هذه الحالة وهذا ما هو الحال عليه في الصف الأول. إذن نستنتج أن القياس: $p, p \to q \mapsto q$ مقبول أو صحيح.

b) بنفس الطريقة المذكورة في الفقرة a) نحسب جدول الصدق كالتالي:

نلاحظ من الجدول أن المقدمتين $p \to q$ و q تكونان صحيحتين في نفس الوقت في الصف الأول والثالث، فإذن يجب أن تكون النتيجة والتي هي p صحيحة في هاتين الحالتين وهذا ما لم يتحقق لأنه في الصف الثالث النتيجة (أي p) خاطئة، فبالتالي نستنتج أن القياس $p \to q, q \mapsto p$ مغالط (أو خطأ).

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يمكن أن تختصر الحالات التي تكون فيها المقدمات $P_1, P_2, ...P_n$ صحيحة كلها في نفس الوقت إلى قول أن العبارة $P_1 \wedge P_2 \wedge ..... \wedge P_n$ توافق (أي دائما صحيحة)، إذن القياس $P_1, P_2, ...P_n \mapsto Q$ منطقيا (أو صحيح) إذا وفقط إذا Q صحيحة كلما كان $P_1 \wedge P_2 \wedge ..... \wedge P_n$ صحيحا، أو بمعنى آخر أن:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge .... \wedge P_n \mapsto Q) \equiv T$ (أي توافق). لنرى هذا في المثال التالي:

مثال ١٩: بَيّن أن القياس $p \to q, q \to r \mapsto p \to r$ منطقي

الحل:

بالمفهوم الجديد يجب أن نبين أن $(p \to q) \wedge (q \to r) \mapsto (p \to r)$ توافق باستخدام جدول الصدق كالتالي:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

إذن $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r) \equiv T$ وبالتالي نستنتج أن القياس $(p \to q) \wedge (q \to r) \mapsto (p \to r)$ منطقي (أو صحيح).

مثال٢٠: هل القياس التالي منطقي؟

إذا كان سوق العمل ممتاز ستكون رواتب كل الموظفين في قطاع معين متساوية. لكن يكون الوضع دائما غير ذلك، أي أن رواتب الموظفين غير متساوية. إذن نستنتج أن سوق العمل غير ممتاز.

الحل: لتكن التعبيرات التالية:

سوق العمل غير ممتاز: $\neg p_1$ سوق العمل ممتاز: p_1

رواتب الموظفين غير متساوية: $\neg p_2$ رواتب الموظفين متساوية في قطاع معين: p_2

فالمقدمات هي: $p_1 \to p_2 , \neg p_2$ والاستنتاج هو: $\neg p_1$

إذن القياس: $p_1 \to p_2 , \neg p_2 \mapsto \neg p_1$ يكون منطقيا إذا وفقط إذا كان: $(p_1 \to p_2)\wedge\neg p_2 \mapsto \neg p_1 \equiv T$

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \to p_2$	$(p_1 \to p_2)\wedge\neg p_2$	$(p_1 \to p_2)\wedge\neg p_2 \to \neg p_1$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

إذن من العمود الأخير نستنتج أن $(p_1 \to p_2)\wedge\neg p_2 \mapsto \neg p_1 \equiv T$ وبالتالي القياس منطقي.

١٠,٣. الحتمية المنطقية

يقال أن العبارة $P(p,q,...)$ تحتم منطقيا العبارة $Q(p,q,...)$ إذا كانت $Q(p,q,...)$ صحيحة كلما كانت $P(p,q,...)$ صحيحة، ونكتب:

$$P(p,q,...) \Rightarrow Q(p,q,...)$$

مثال٢١: p يحتم منطقيا $p \vee q$ لأنه بمطالعة جدول صدق $p \vee q$ التالي نلاحظ أن p تكون صحيحة في كل الحالات التي تكون فيها $p \vee q$، وهما حالتان موجودتان في الصف الأول والثاني. إذا $p \Rightarrow p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وبطريقة أخرى هذا يعادل قولنا أن القياس $P(p,q,...) \mapsto Q(p,q,...)$ منطقي، ما دمنا نقول أن $Q(p,q,...)$ صحيح كلما كان $P(p,q,...)$ صحيح والعكس أيضا. إضافة إلى ذلك القياس $P \mapsto Q$ منطقي إذا وفقط إذا كانت العبارة المشروطة $P \to Q$ دائما صحيحة أي توافق. يمكننا تلخيص هذا الكلام في النظرية التالية:

لأية عبارتين $P(p,q,...)$ و $Q(p,q,...)$ الجمل التالية متكافئة:

- $P(p,q,...)$ تحتم منطقيا $Q(p,q,...)$
- القياس $P(p,q,...) \mapsto Q(p,q,...)$ منطقي (أو صحيح)
- العبارة المشروطة $P \to Q$ توافق (دائما صحيحة)

تمارين

تمرين ١: أي من الجمل التالية نعتبرها تعبيرات منطقية:

a) يحتوي جسم الإنسان على رجلين	d) أبيض مثل الثلج
b) لا تقف على الرصيف	e) سوف يسقط المطر على مدينة الرياض الأسبوع القادم
c) ليس هناك عدد أولي كبير	f) هل هذه مناقشة منطقية؟
d) $45 > 58$	g) إذا $2+2=5$ فإن الرياح ستهب من الشرق

تمرين ٢: لتكن التعبيرات التالية: q:"الجو ممطر" p:"الجو بارد"

اكتب جملة بسيطة تعبر عن: $a)\ \neg p \quad b)\ p \wedge q \quad c)\ p \vee q \quad d)\ q \vee \neg p$

تمرين ٣: لتكن التعبيرات التالية:

r:"عمر يقرأ جريدة الجزيرة" q:"عمر يقرأ جريدة عكاظ" p:"عمر يقرأ جريدة الرياض"

اكتب التعبيرات التالية باستخدام الروابط $\neg, \vee, \wedge$:

a) عمر يقرأ جريدة الرياض أو جريدة عكاض ولكن لا يقرأ جريدة الجزيرة
b) عمر يقرأ جريدة الرياض وجريدة عكاض أو لا يقرأ جريدة الرياض وجريدة الجزيرة
c) غير صحيح أن عمر يقرأ جريدة الرياض ولكن لا يقرأ جريدة الجزيرة
d) غير صحيح أن عمر يقرأ جريدة الجزيرة أو جريدة عكاض ولكن لا يقرأ جريدة الرياض

تمرين ٤: لتكن التعبيرات التالية:

s: البروتينات ضرورية للإنسان r: جدة عاصمة المملكة q: زحل كوكب p: الشمس نجم

أوجد قيم الصدق للتعبيرات التالية:

$a)\ p \vee q\ ,\ p \vee r\ ,\ p \vee s\ ,\ q \vee r\ ,\ q \vee s\ ,\ r \vee s \qquad b)\ p \wedge q\ ,\ p \wedge r\ ,\ p \wedge s\ ,\ q \wedge r\ ,\ q \wedge s\ ,\ r \wedge s$

تمرين ٥: باستخدام جدول الصدق بين أن: $(p \wedge q) \wedge \neg (p \vee q) \equiv F$

تمرين ٦: باستخدام جدول الصدق بين أن العبارات التالية توافق:

$a)\ p \vee \neg (p \vee q) \qquad b)\ \{(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)\} \vee q \qquad c)\ \neg \{p \wedge (\neg p \vee q)\} \vee q$

تمرين ٧: باستخدام جدول الصدق بين التطابقات التالية:

$a)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad b)\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \quad c)\ \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

تمرين ٨: باستخدام قوانين جبر التعبيرات بين أن:

$a)\ p \vee \neg(p \vee q) \equiv T \quad b)\ \neg\{p \wedge (\neg p \vee q)\} \vee q \equiv T \quad c)\ \{p \wedge (\neg p \vee q)\} \vee \{q \wedge \neg(p \wedge q)\} \equiv q$

$d)\{p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\} \vee q \equiv T \quad e)\ (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \equiv T$

تمرين ٩: اختصر ما يلي:

$a)(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad b)\ \neg p \wedge \{\neg q \wedge (\neg p \vee q)\} \quad c)(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q)$

تمرين ١٠: اكتب التعبيرات التالية باستخدام الرموز المناسبة:

a) إذا كان فيه مشاكل في السفر والسكن في جدة فلن أذهب إلى جدة

b) إذا كان غدا عطلة فلن يكون هناك اختبار، ولكن إذا كان هناك اختبار فسوف يكون في مادة الرياضيات

c) ستزدهر المملكة إذا وفقط إذا اشتغلنا جديا وبإخلاص وبذكاء

تمرين ١١: أوجد قيم الصدق للتعبيرات التالية:

$a)3+8=11$ إذا $1+3=4$ | $b)3+11=10$ إذا $1+3=7$

$c)3+8=11$ إذا $1+3=7$ | $d)3+8=10$ إذا $1+3=4$

تمرين ١٢: لتكن التعبيرات التالية:

p: المثلث ABC متطابق الأضلع | q: المثلث ABC متطابق الزوايا

اكتب مقلوب، معكوس ومقلوب المعكوس العبارة المشروطة $p \to q$

تمرين ١٣: أعد كتابة التعبيرات التالية بدون استخدام رابط الشرط

a) إذا اجتهد الطالب فإن معدله سيكون مرتفع | b) إذا كان الجو باردا فإنه يلبس ثوب أسود

(مع العلم أن: $p \to q \equiv \neg p \vee q$)

تمرين ١٤: عبر عن نفي العبارات التالية بجملة بسيطة:

a) إذا عمل فإنه سيقبض في آخر الشهر

b) سيسبح إذا وفقط إذا كان الماء دافئا

c) إذا أمطرت فإنه لن يقود السيارة

تمرين ١٥: بَيّن أن:

$a)\ p \leftrightarrow \neg\neg p \equiv T$ $\quad b)[p \wedge (p \to q)] \to q \equiv T$

$c)\ \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv T$ $\quad d)\ \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \equiv T$

$e)[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \equiv T$ $\quad f)(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p) \equiv T$

تمرين ١٦: بَيّن التطابقات التالية:

$a)(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ $\quad b)\ p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\quad c)(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

تمرين ١٧: بَيّن ما يلي:

$a)\ p \to q,\ \neg p \mapsto \neg q$ قياس مغالط $\quad b)\ p \to q,\ \neg q \mapsto \neg p$ قياس منطقي

$c)\ p \to \neg q, r \to q, r \mapsto \neg p$ قياس منطقي

تمرين ١٨: بَيّن أن القياس التالي مغالط:

إذا اشتريت أسهم سوف أخسر المال، إذا خسرت المال سوف أشتري أسهم.

تمرين ١٩: هل القياس التالي منطقياً أم مغالطاً:

إذا 7 أقل من 4 فإن 7 ليس عدد أولي. 7 ليس أقل من 4 إذاً 7 عدد أولي.

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات الحاسب

البوابات المنطقية والدوائر

البوابات المنطقية والدوائر

٣

الجدارة: معرفة مفهوم البوابات المنطقية والقدرة على تصميم دوائر منطقية واختصارها...

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- اختصار العبارات المنطقية باستخدام جبر بول.
- تصميم الدوائر المنطقية.
- اختصار الدوائر المنطقية.
- استخدام البوابات المنطقية الأساسية.
- تصميم الدوائر المنطقية وكيفية تصميمها باستخدام البوابة $NAND$.

الوقت المتوقع للتدريب: ست ساعات.

البوابات المنطقية والدوائر

١. جبر بول

لقد رأينا في الوحدة الثانية أن جبر التعبيرات هو نظام ثنائي الحالة أي أن العبارة إما أن تكون صحيحة أو خاطئة. عادة ما نسمي الجبر المرتبط بمثل هذه النظم جبر بول والقوانين التي رأينها من قبل تنطبق بنفس الطريقة إلا أنها تكتب تماشيا مع الرموز التالية:

a تقابله العبارة p

$\bar{a}$ تقابله العبارة $\neg p$

$\times$ تقابله العملية $\wedge$ (الرمز $\times$ عادة ما يحذف، فمثلا $a \times b$ تكتب فقط ab)

$+$ تقابله العملية $\vee$

1 تقابله قيمة الصدق: صحيح (T)

0 تقابله قيمة الصدق: خطأ (F)

فإذن باستخدام الرموز الجديدة يمكن إعادة كتابة القوانين التي مرت علينا في الوحدة الثانية كالتالي:

	قوانين جبر التعبيرات	قوانين جبر بوول
1	$p \vee q = q \vee p$	$a + b = b + a$
2	$p \wedge q = q \wedge p$	$a \times b = b \times a$
3	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$
4	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
5	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
6	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$
7	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$\overline{a + b} = \bar{a} \times \bar{b}$
8	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$\overline{a \times b} = \bar{a} + \bar{b}$
9	$p \vee p = p \ , \ p \wedge p = p$	$a + a = a \ , \ a \times a = a$
10	$p \vee T = T \ , \ p \wedge T = p$	$a + 1 = 1 \ , \ a \times 1 = a$
11	$p \vee \neg p = T \ , \ p \wedge \neg p = F$	$a + \bar{a} = 1 \ , \ a \times \bar{a} = 0$
12	$p \vee F = p \ , \ p \wedge F = F$	$a + 0 = a \ , \ a \times 0 = 0$

مثال ١: اختصر عبارات بوول التالية: $b) Z = a + b\overline{c}$ $\qquad a) Z = (a+bc)(\overline{a}\,\overline{b}+c)$

الحل:

$a)$	القانون		$b)$	القانون
$Z = (a+bc)(\overline{a}\,\overline{b}+c)$			$Z = \overline{a+\overline{b}\,\overline{c}}$	
$= a(\overline{a}\,\overline{b}+c)+bc(\overline{a}\,\overline{b}+c)$	5		$= \overline{a}(\overline{b}\,\overline{c})$	7
$= a\overline{a}\,\overline{b}+ac+\overline{a}\,\overline{b}bc+bcc$			$= \overline{a}(\overline{\overline{b}\,\overline{c}})$	8
$= 0\cdot\overline{b}+ac+\overline{a}\cdot 0\cdot c+bc$	9 , 11		$= \overline{a}(\overline{\overline{b}}+\overline{\overline{c}})$	
$= 0+ac+0+bc$	12		$= \overline{a}(b+c)$	
$= ac+bc$	12			
$Z = c(a+b)$	5			

٢. جدول الصدق

يمكننا الآن كتابة جدول صدق التعبيرات باستخدام رموز جبر بول. فمثلا لتكن العبارة التالية:

"رسوم تأمين السيارة تكون عالية إذا كان السائق شابا أو له سجل من الحوادث"

ليكن:

$+ : OR$ له سجل من الحوادث: b السائق شاب: a رسوم التأمين عالية: Z

إذن يمكن كتابة العبارة (عبارة بول) كالتالي:

$$Z = a + b$$

ويكون جدول الصدق لهذه العبارة كالتالي:

a	b	$Z = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

كما يمكننا التأكد من تطابق عبارات بول باستخدام جدول الصدق. تكون عبارتان متطابقتان إذا كان إدخال متطابق على كل من العبارتين ينتج خرج متطابق. المثال التالي يوضح ذلك:

مثال ٢: بَيّن أن: $ab + ac = a(b+c)$

الحل:

كما رأينا في تطابق التعبيرات في الفصل الأول من هذه الوحدة نقوم بحساب جدول الصدق لطرفي المعادلة ولكن هذه المرة نستخدم 1 و 0 عوضا عن T و F كالتالي:

a	b	c	ab	ac	$ab+ac$	$b+c$	$a(b+c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

إذن مـن الجـدول نلاحـظ أن العمـود ٦ (أي $ab+ac$) يطـابق العمـود الأخـير (أي $a(b+c)$)، فبالتـالي العبارتان متطابقتان أي أن:

$$ab+ac=a(b+c)$$

٣. تعريف البوابات المنطقية والدوائر

الدوائر المنطقية (كما تسمى كذلك الشبكة المنطقية) هي عبارة عن هياكل مصممة من عدد من الدوائر البدائية تسمى بوابات منطقية. كل واحد من هذه الدوائر المنطقية يمكن النظر إليها كماكينة L تحتوي على جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط. في أي لحظة كل جهاز إدخال في L يستوعب وحدة أساسية واحدة من المعلومات 0 أو 1 ثم تعالج هذه البيانات بالدائرة لتعطي الناتج وحدة أساسية واحدة 0 أو 1 على جهاز الإخراج. وبالتالي يمكن تخصيص متتابعات من الوحدات الأساسية لكل جهاز إدخال (حيث كل المتتابعات لها نفس العدد من الوحدات الأساسية) حيث L تعالج وحدة أساسية في كل مرة لتنتج للخروج متتابعة لها نفس العدد من الوحدات. يمكن تفسير الوحدة الأساسية كدفعة فولتية خلال جهاز الإدخال أو الإخراج.

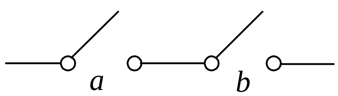
٤. البوابات المنطقية

هناك ثلاثة بوابات منطقية أساسية سنذكرها فيما يلي، إضافة إلى بوابات أخرى. يمكن افتراض أن البوابات تعالج المتتابعة من اليسار إلى اليمين أو من اليمين إلى اليسار وسوف نعتبر في هذا الفصل الفرضية الأولى ما لم يذكر خلاف ذلك.

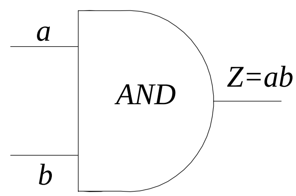
١،٤. البوابة *AND* (و)

كل إشارة خرج ناتجة من بوابة *AND* لها قيمة صدق صحيحة (أي 1) إذا وفقط إذا كانت إشارات الإدخال لها قيم صدق صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان في تسلسل (الشكل $1a$) يشكلان

بوابة AND . تعطى إشارة الخرج كالتالي: $Z = ab$. ترسل الإشارة (أي أن الخرج 1) إذا وفقط إذا كان مفتاحي التشغيل $B \; AND \; A$ مقفلين (أي أن $a = 1 \; AND \; b = 1$). الشكل $1b$ يمثل البوابة AND .
جدول الصدق يبين الخرج Z للبوابة AND لكل توافيق (حالات) a و b. فمثلا نلاحظ من الجدول أن $Z = 0$ إذا $a = 0$ و $b = 0$. لثلاثة مداخل a,b,c يكون الخرج: $Z = abc$



الشكل $1a$

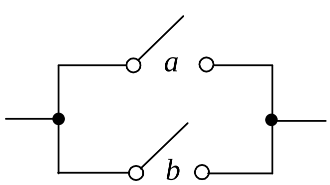


الشكل $1b$

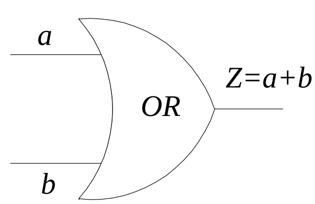
a	b	$Z = ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

٢,٤. البوابة OR (أو)

ناتج البوابة OR هو إشارة خرج صحيحة (أي 1) إذا كانت واحدة من إشارات الإدخال صحيحة (أي 1).
مفتاحا تشغيل موصلان بشكل موازي (الشكل $2a$) يشكلان بوابة OR. تعطى إشارة الخرج كالتالي: $Z = a + b$. ترسل الإشارة (أي أن $Z = 1$) إذا كان أحد مفتاحي التشغيل مقفل (أي أن $a = 1 \; OR \; b = 1$).
الشكل $2b$ يمثل البوابة AND . جدول الصدق يبين الخرج Z للبوابة OR لكل توافيق (حالات) a و b.
فمثلا نلاحظ من الجدول أن $Z = 1$ إذا كان $a = 0$ و $b = 1$.



الشكل $2a$



الشكل $2b$

a	b	$Z = ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

٣,٤. البوابة NOT (النفي)

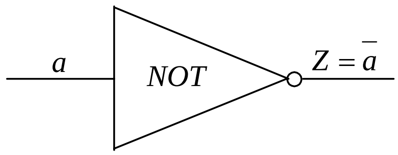
هذه البوابة تزود الشرط أنه لن تكون هناك إشارة خرج عندما يكون هناك إشارة إدخال، أي أن:

$$a = 1 \quad \text{لما} \quad Z = 0 \qquad \text{و} \qquad a = 0 \quad \text{لما} \quad Z = 1$$

وهذا يعني أن الخرج Z هو معكوس الإدخال. وهذا يكافئ المتممة في جبر بول، أي أن:

$$Z = \overline{a}$$

تمثيل البوابة NOT وجدول الصدق يكون كالتالي:



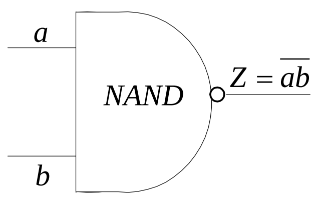
a	$Z=\bar{a}$
0	1
1	0

٤,٤. البوابة $NAND$

البوابة $NAND$ هي البوابة $NOT\ AND$. إشارة الخرج من البوابة $NAND$ هي معكوسة إشارة الخرج من البوابة AND. إذن الخرج من البوابة $NAND$ هو متممة الخرج لبوابة AND ، أي أن:

$$Z=\overline{ab}$$

تمثيل البوابة $NAND$ وجدول الصدق يكون كالتالي:

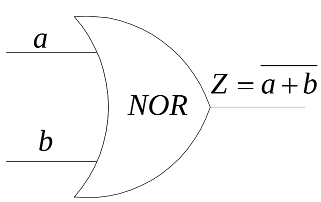


a	b	ab	$Z=\overline{ab}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

٥,٤. البوابة NOR

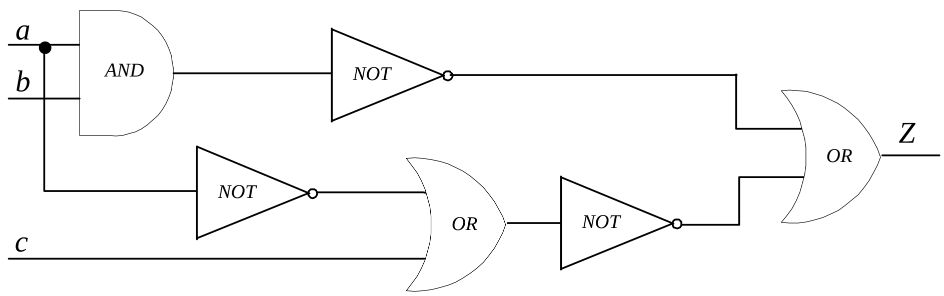
البوابة NOR هي البوابة $NOT\ OR$. الخرج من البوابة NOR هو معكوس خرج البوابة OR. إذن إشارة الخرج من البوابة NOR هي معكوسة إشارة خرج البوابة OR ، أي أن: $Z=\overline{a+b}$

تمثيل البوابة NOR وجدول الصدق يكون كالتالي:



a	b	$a+b$	$Z=\overline{a+b}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

مثال٣: أوجد الخرج Z لدائرة المنطقية التالية:



الحل:

الدخل على البوابة AND : $a \;\; and \;\; b$ الخرج من البوابة AND : ab

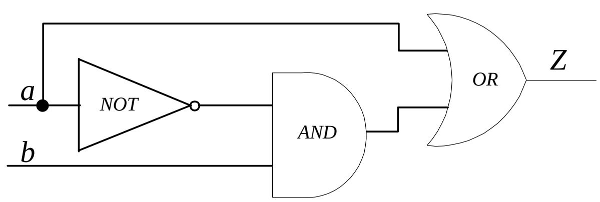
الخرج من البوابة NOT (الأعلى): $\overline{ab}$ الخرج من البوابة NOT (الأسفل): $\overline{a}$

الدخل على البوابة OR : $\overline{a} \;\; and \;\; c$ الخرج من البوابة OR : $\overline{a}+c$

الخرج من البوابة NOT : $\overline{\overline{a}+c}$ الدخل على البوابة OR : $\overline{\overline{a}+c} \;\; and \;\; \overline{ab}$

وفي النهاية يكون الخرج Z من البوابة OR : $Z=\overline{ab}+\overline{\overline{a}+b}$

مثال٤: أوجد واختصر الخرج Z للدائرة المنطقية التالية ثم ارسم الدائرة المنطقية المطابقة لهذا الخرج.



الحل:

الخرج من البوابة NOT : $\overline{a}$

الدخل على البوابة AND : $\overline{a} \;\; and \;\; b$

الخرج من البوابة AND : $\overline{a}b$

الدخل على البوابة OR : $\overline{a}b \;\; and \;\; a$

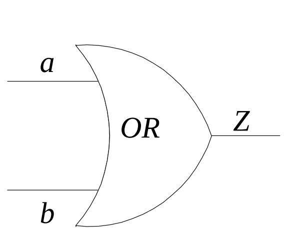
إذن الخرج من البوابة الأخيرة OR يكون: $Z=a+\overline{a}b$

وكما رأينا من قبل باستخدام قوانين جبر بول:

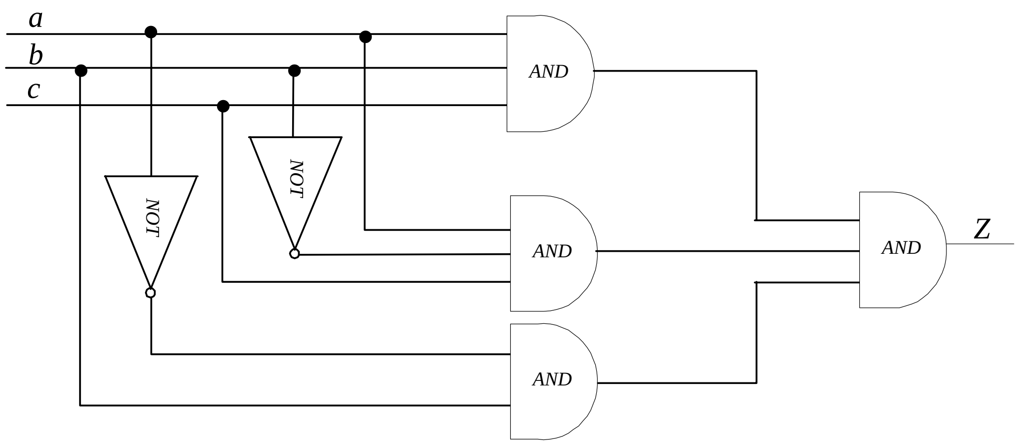
$Z=a+\overline{a}b=(a+\overline{a})(a+b)$ (قانون 6 و 11)

$Z=a+b$ (قانون 11)

وخرج مثل هذا يمكن الحصول عليه من البوابة OR كما في الشكل:



مثال ٥: أوجد خرج الدائرة المنطقية التالية:



الحل:

الدخل على البوابة AND (الأولى من الأعلى): a and b and c والخرج: abc

الدخل على البوابة AND (الثانية): a and $\bar{b}$ and c والخرج: $a\bar{b}c$

الدخل على البوابة AND (الثالثة): $\bar{a}$ and b والخرج: $\bar{a}b$

إذا الدخل على البوابة OR : abc and $a\bar{b}c$ and $\bar{a}b$

وبالتالي يكون الخرج Z : $Z = abc + a\bar{b}c + \bar{a}b$

مثال ٦: أوجد الخرج من جدول الصدق التالي في أبسط شكل ثم صمم دائرة مناسبة لهذا الخرج.

a	b	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

الحل:

نقوم بإيجاد قانون بوول لكل صف فيه الخرج 1 ثم نقوم بالاختصار كالتالي:

$$Z = \bar{a}\bar{b} \quad OR \quad \bar{a}b \quad OR \quad ab$$

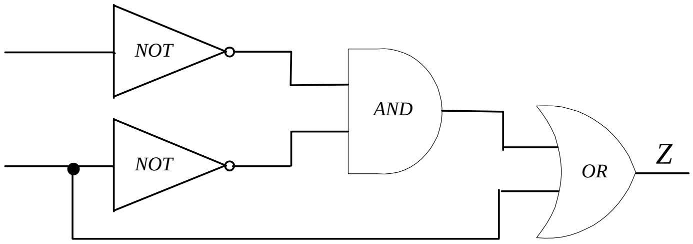
$$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + ab$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b(\bar{a} + a)$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b1$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b$$

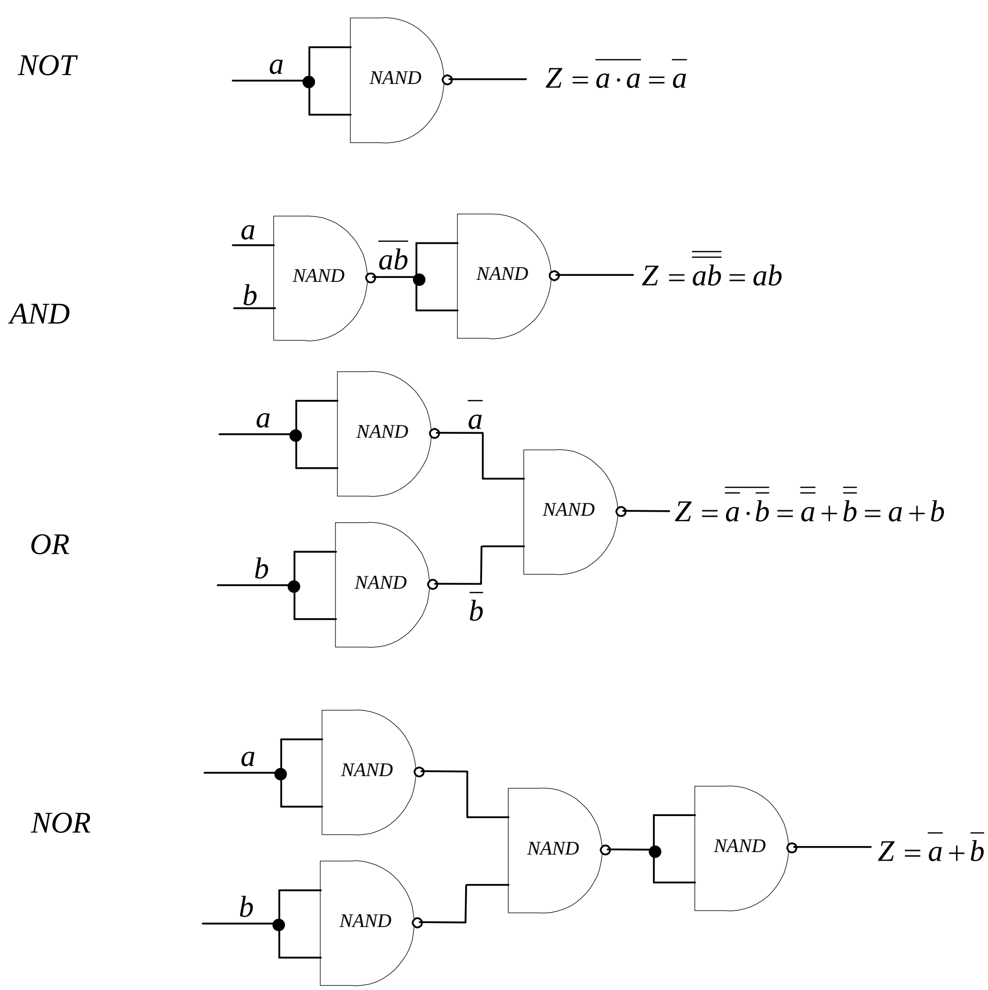
وتكون الدائرة المنطقية لمثل هذا الخرج كما هو موضح في الشكل التالي:



٦,٤. تصميم الدوائر باستخدام البوابة *NAND*

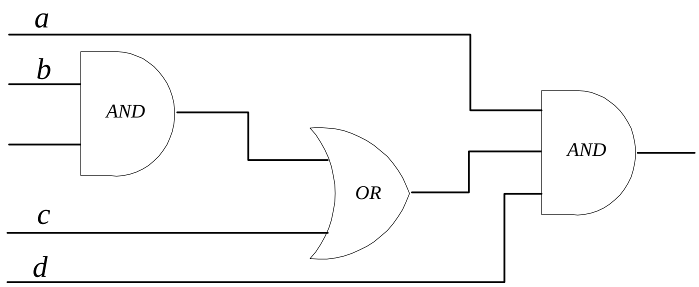
كل مهام البوابات المنطقية المستخدمة في الدوائر المنطقية يمكن الحصول عليها باستخدام بوابة جديدة واحدة فقط تسمى البوابة *NAND* . و رغم أن النتيجة من استعمال مثل هذه البوابة يؤدي إلى استخدام عدد كبير من البوابات فهذا يقلل من التكلفة الإجمالية وذلك لأنه يتم استعمال نوع واحد من البوابات.

ليكن لدينا المهام التالية باستخدام البوابة *NAND* فقط:



يمكن تغيير الدوائر المنطقية باستخدام البوابة *NAND* وذلك باستبدال كل البوابات المكونة للدائرة بالمجموعة المطابقة لبوابة *NAND* المذكورة أعلاه. كما يمكن تقليل عدد البوابات *NAND* المستخدمة وذلك بتغيير المهام المنطقية للدائرة ككل.

مثال ٧: أوجد خرج الدائرة التالية ثم استبدلها بدائرة مطابقة مستخدما فقط البوابة $NAND$.



الحل:

الدخل على أول بوابة AND : $b \quad and \quad c$ والخرج: bc

الدخل على البوابة OR : $bc \quad and \quad d$ والخرج: $bc + d$

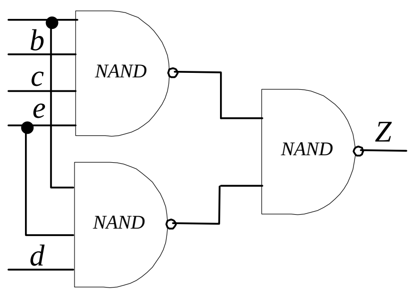
الدخل على ثاني بوابة AND : $bc + d \ , \quad e \quad and \quad a$

إذن يكون الخرج النهائي: $Z = ae(bc + d) = abce + ade$

لتغيير هذه الدائرة مستخدمين البوابة $NAND$ نقوم أولا بحذف البوابة OR باستخدام متممة المتممة كالتالي: $Z = abce + ade = \overline{\overline{abce + ade}}$ ثم باستخدام قانون دي مورجان نحصل على:

$$Z = \overline{\overline{abce} \cdot \overline{ade}}$$

يمكن الآن الحصول على دائرة جديدة باستخدام البوابة $NAND$ كالتالي:



تمارين

تمرين١: اختصر كل من العبارات التالية باستخدام قوانين جبر بوول:

$$a)\,\overline{a}\,\overline{b}(a+b)\quad b)\,(a+bc)(\overline{a}+\overline{b}\,\overline{c})\quad c)\,(a+ac)(b+bc)(c+ca)\quad d)\,(a+b)(a+\overline{b})$$

$$e)\,(a+b)(a+b^2+b)\quad f)\,a^4+a^3+a^2+a\quad g)\,(\overline{\overline{a}b+c})\quad h)\,(\overline{\overline{y}+yz})+(\overline{\overline{y}+yz})$$

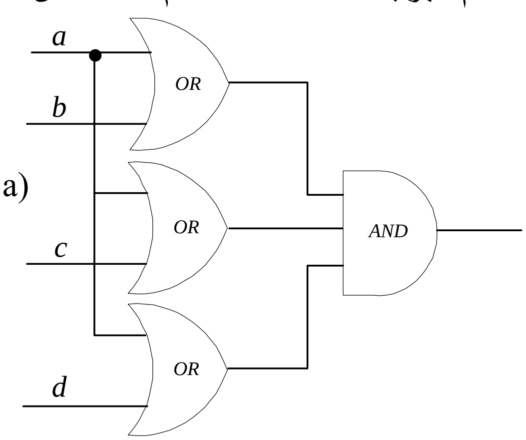
تمرين٢: استخدم جدول الصدق للتأكد من صحة المعادلات التالية ثم ارسم الدوائر المنطقية لتمثيل كل من أطراف المعادلة.

$$a)\,a+ab=a\qquad b)\,a(a+b)=a\qquad c)\,a(\overline{a}+b)=ab$$

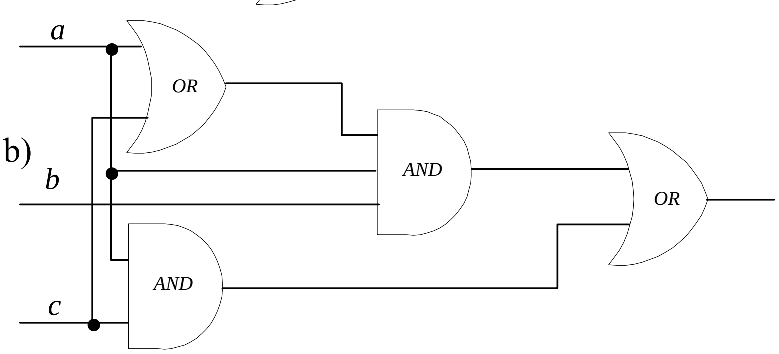
$$d)\,a+bc=(a+b)(a+c)\qquad e)\,\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}\qquad f)\,\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$$

تمرين٣: أوجد خرج الدوائر التالية ، ثم باختصار هذا الخرج صمم دائرة جديدة مطابقة في كل حالة. استبدل الدائرة المختصرة باستخدام البوابات *NAND* فقط ثم تأكد من الدائرة باستخدام جدول الصدق.

a)



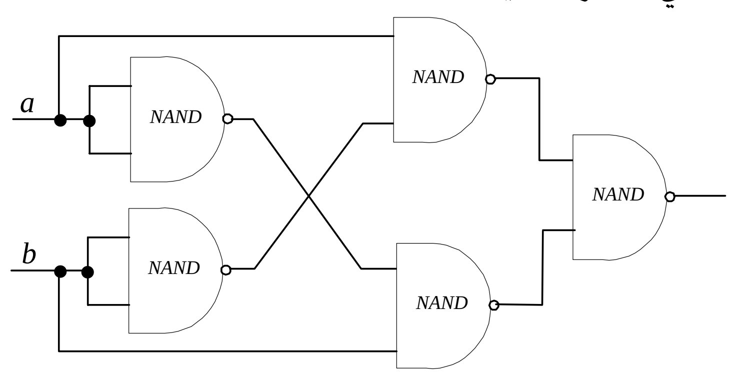
b)



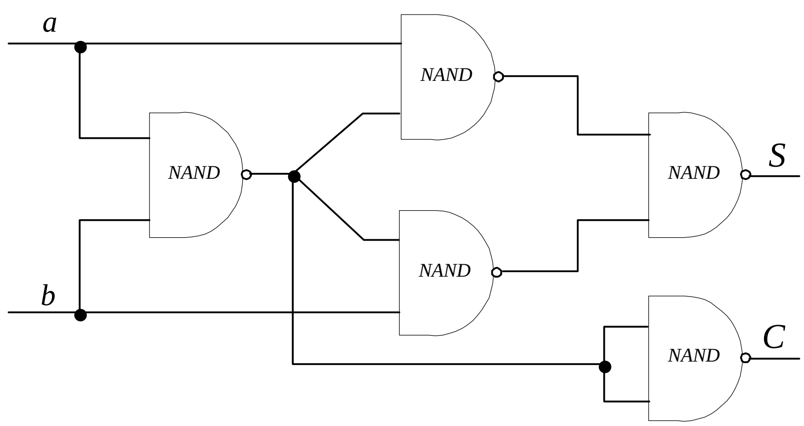
تمرين٤: استخدم البوابات *NAND* فقط لتصميم دائرة لها خرج $Z=\overline{\overline{a}+b}+ab$ وبين أنه من الممكن الحصول على نفس الخرج باستخدام بوابة واحدة من كل من *AND* ، *OR* و *NAND* . تأكد من الدائرة باستخدام جدول الصدق.

تمرين٥: استخدم أربعة بوابات *NAND* للحصول على الخرج $Z=a+b+c$ واستخدم جدول الصدق لبيان طريقة شغل الدائرة.

تمرين ٦: أوجد الخرج المنطقي للدائرة التالية:



تمرين ٧: برهن أن: $S = \bar{a}b + a\bar{b}$ و $C = ab$ في الدائرة التالية:



تمرين ٨: أوجد خرج (في أبسط صورة له) الدائرة التي تشتغل حسب جدول الصدق المعطى، ثم صمم الدائرة مستخدما فقط البوابة $NAND$.

a	b	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

تمرين ٩: صمم دائرة تشتغل على حسب الجدول التالي مستخدما بوابات من اختيارك.

a	b	c	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

رياضيات الحاسب

مبادئ الرياضة الرقمية

مبادئ الرياضة الرقمية

٤

اسم الوحدة: مبادئ الرياضة الرقمية

الجدارة: معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها والجموعات العددية المشهورة، ومعرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها، ومعرفة مفهوم الخوارزمية والقدرة على حساب تعقدها وبعض الخوارزميات المشهورة..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- تعريف المجموعات وتحديد خصائصها.
- اجراء العمليات عليها ومقارنتها بالعمليات المنطقية.
- تصنيف الأعداد حسب مجموعاتها العددية.
- تحديد مجال الدوال ومداها وأنواعها وتركيبها.
- تصنيف الدوال العددية المشهورة.
- حساب الدوال العددية الهامة في الحاسب.
- تحويل المسائل إلى خوارزميات.
- حساب تعقد خوارزمية ما.
- تحليل الخوارزميات المشهورة للبحث والترتيب.

الوقت المتوقع للتدريب: تسع ساعات.

الفصل الأول : المجموعات

١. تعريف المجموعة

نعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تمييزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه.

فمثلا: لتكن المجموعات التالية:

a) مجموعة الأعداد $2, 4, 6, 8, 10$

b) مجموعة الإثني عشر شهرا في السنة

c) مجموعة الأعداد الكبيرة

d) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة

في هذا المثال نعتبر a) و b) مجموعتين لأن عناصرها معروفة ومحددة أما بالنسبة للمجموعتين c) و d) فلا نعتبرهم رياضيا مجموعتين لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى أخر. فإذا عناصر c) و d) غير معروفة ومحددة وبالتالي لا نعتبرها مجموعتين. عندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نفهم ضمنا أننا نعني مجموعة رياضية.

رموز المجموعات وعناصرها

عادة ما نرمز للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A, B, X, Y ... إلخ بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a, b, x, y ...إلخ.
وعادة ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع {} وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $-2, 0, 1, \pi$ كالتالي: $A=\{-2,0,1,\pi\}$

ولما كان 0 عنصرا من المجموعة A فإننا نرمز لذلك رياضيا بالعبارة $0\in A$ ونقرأها 0 ينتمي إلى A. أما العنصر 5 مثلا فلا ينتمي إلى A ونعبر عن هذا ب $5\notin A$ وتقرأ 5 لا ينتمي إلى A.

طرق تعريف المجموعات

هناك ثلاثة طرق لتعريف المجموعة وهي كما يلي:

- طريقة التعريف بعبارة

في هذه الطريقة نكتفي بذكر جملة معينة يمكن عند قراءتها تحديد عناصر المجموعة فمثلا نقول
A هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

- طريقة السرد أو حصر العناصر

وفيها نقوم بكتابة جميع عناصر المجموعة. فمثلا A مجموعة الأعداد الزوجية بين ١ و ٩ هي:

$$A = \{2,4,6,8, \}$$

طبعا هذه الطريقة غير مناسبة إلا لمجموعات قليلة العناصر فمثلا لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. أيضا يلاحظ الطالب أن ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة فإن المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة: $A = \{4,6,2,8\}$ كما يلاحظ كذلك أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة فمثلا المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة $A = \{2,4,4,6 ,8, 2\}$

- طريقة القاعدة المعينة

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمطا ظاهرا بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة. فمثلا المجموعة $A = \{2,4,6,8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

$A = \{x : x \in N\ ,\ x$ زوجي $,8 \geq x \geq 2\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x حيث x عدد زوجي طبيعي أكبر أو يساوي ٢ وأصغر أو يساوي ٨.

المجموعة الجزئية

نقول أن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A أو بمعنى آخر أن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A ونرمز لهذا كالتالي: $B \subseteq A$

ويمكن كتابة هذا رياضيا كالتالي:

$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$ ($\forall$: يقرأ مهما يكون)

إذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول أن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

مثال ١: لتكن المجموعات التالية: $A = \{3,5,11,24\}$ $B = \{5,24\}$ $C = \{3,11,12\}$

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة B و C مع A أن: $B \subset A$ و $C \not\subset A$

خصائص المجموعة الجزئية

$a)\phi \subseteq A \subseteq U \quad b) A \subseteq A \quad c) A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad d) A = B \Rightarrow A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

تساوي مجموعتين

نقول أن المجموعتين A و B متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منها مجموعة جزئية من الأخرى أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

مثال٢: هل المجموعتان التاليتان متساويتان: $A = \{0,1\}$ $B = \{x : x \in N,\ x^2 - x = 0\}$

الحل:

عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن عناصر المجموعة B غير محصورة فيجب علينا إذا تحديد عناصرها و يتم ذلك بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x - 1 = 0\ ,\ x = 1$$

إذا: $B = \{0,1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$

المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية

عند دراسة أية ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلا يمكن أن نعتبر جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية. عادة ما نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية بالمجموعة الشاملة و نرمز لها بالرمز U. فمثلا تعتبر المجموعة $U = \{-5,2,7,21\}$ هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A = \{2,21\}$ و $B = \{-5,7,21\}$ لأن المجموعات A و B مجموعات جزئية من U.

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$. فمثلا المجموعة $A = \{x : x \neq x\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور. مفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أية مجموعة أخرى.

تمارين

تمرين١: أي من الجمل التالية تحدد مجموعة رياضية

a) مجموعة القاعات الكبيرة داخل الكلية

b) مجموعة المسلمين المجاهدين في غزوة بدر

c) مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٥

d) مجموعة الأعداد الطبيعية التي هي أكبر من ١ وأصغر من ٢

e) مجموعة الطلبة الأذكياء في الكلية

تمرين٢: اذكر عناصر المجموعات التالية

$a) A=\{x:x\in N, 3<x<12\}$ $b) B=\{x:x\in N, x odd, 3\le x<11\}$

$c) C=\{x:x\in N, 4x-3=1\}$ $d) D=\{x:x\in N, x+1=0\}$

$e) E=\{x:x=5n-6, n\in N, 1\le n<5\}$ $f) F=\{x:x\in N, \sqrt{x^2+1}=2\}$

تمرين٣: عبر عن المجموعات التالية بقاعدة معينة:

$a) A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ $b) B=\{0,4,8,12,16........\}$

$c) C=\{....-10,-5,0,5,10.......\}$ $c) D=\{1,4,9,16,25,36,49\}$

تمرين٤: لتكن المجموعات التالية:

$\phi,\ A=\{1\}, B=\{1,3\}, C=\{1,3,5\}, D=\{1,2,3,4,5\}, E=\{1,3,5,7,9\}, U=\{1,2,....,8,9\}$

أملأ الفراغات التالية بالرمز المناسب:

$a)\phi.....A$ $b)A.....B$ $c)B.....C$ $d)B.....E$

$e)C.....D$ $f)C.....E$ $g)D....E$ $h)D.....U$

تمرين٥: أي من المجموعات التالية متساوية:

$a) A=\{x:x^2-4x+3=0\}$ $b) B=\{x:x^2-3x+2=0\}$ $c) C=\{x:x\in N, x<3\}$

$d) D=\{x:x\in N, x odd, x<5\}$ $e) E=\{1,2\}$ $f) F=\{1,2,1\}$ $g) G=\{3,1\}$ $h) H=\{1,1,3\}$

تمرين٦: هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

$a) a=\{a\}$ $b) 5\in\{5\}$ $c) 9\in\{1,3,6,....\}$ $d) \phi\subseteq A$

$e) A\not\subset U$ $f) \phi\in\{\phi\}$ $g) 4\in\{1,2,3,\{4\}\}$ $h) 7\notin\{3,4,2,\{5\}\}$

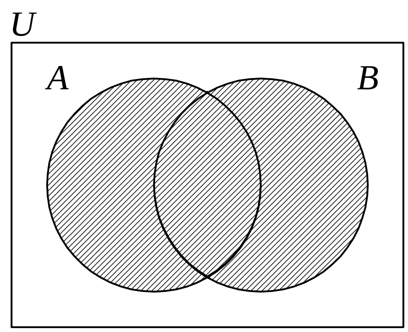
٢. العمليات على المجموعات

اتحاد مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتان فإن اتحادهما هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في كل من A أ و B ونرمز لهذه العملية بالرمز $A \bigcup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بأشكال توضيحية تسمى أشكال فن حيث تمثل المجموعة الشاملة U بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون اتحادهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم:



$A \bigcup B$

مثال٣: لتكن المجموعتان $B = \{2,4,6\}$ $A = \{1,2,3,5\}$ إذن: $A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

خصائص الاتحاد:

1) $A \bigcup A = A$ 2) $A \bigcup \phi = A$ 3) $A \bigcup U = U$

4) $A \subseteq (A \bigcup B)$, $B \subseteq (A \bigcup B)$ 5) $A \bigcup B = B \bigcup A$ 6) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$

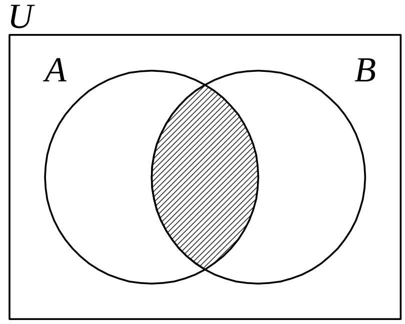
الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

تقاطع مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتان فإن تقاطعهما هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز للتقاطع بالرمز $A \bigcap B$ ونعرفه كما يلي:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A \cap B$

مثال ٤: لتكن المجموعتان: $B=\{x : x \in N , x \geq 11\}$ $A=\{x : x \in N , x \geq 6\}$ إذا :

$$A \cap B=\{x : x \in N , x \geq 11\}$$

خصائص التقاطع:

1) $A \cap A = A$ 2) $A \cap \phi = \phi$ 3) $A \cap U = A$

4) $(A \cap B) \subseteq A , (A \cap B) \subseteq B$ 5) $A \cap B = B \cap A$ 6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع (قانون التوزيع)

لتكن A , B , C ثلاثة مجموعات ما فيمكن أن نقول:

$a)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (أي الاتحاد توزيعي على التقاطع)

وكذلك يمكن أن نقول:

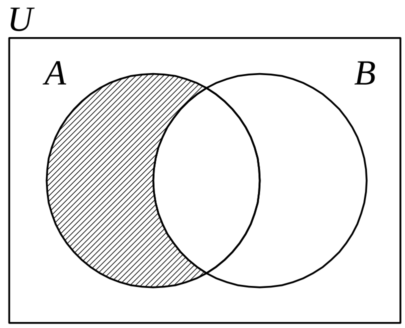
$b)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (أي أن التقاطع توزيعي على الإتحاد)

الفرق بين مجموعتين

نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A بأنه مجموعة العناصر التي هي موجودة في A وفي نفس الوقت ليست موجودة في B ويرمز لهذا الفرق بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A-B$

مثال٥: لتكن المجموعتان: $B=\{3,6,12,18,20\}$ $A=\{1,5,6,12,20\}$ إذا: $A-B=\{1,5\}$

خصائص الطرح:

1) $A-A=\phi$　　2) $A-\phi=A$　　3) $A-U=\phi$

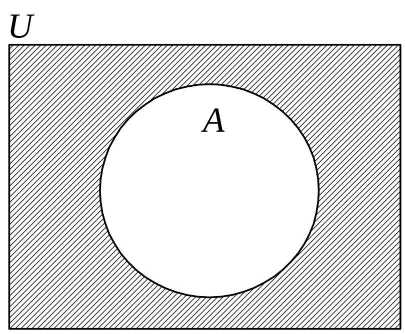
4) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$　　5) $A-B=A \Leftrightarrow A\bigcap B=\phi$　　6) $A-B=\phi \Leftrightarrow A\subseteq B$

متممة المجموعة

إذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A ، نُعرِّف متممة A بأنها مجموعة العناصر الموجودة في U وفي نفس الوقت ليست موجودة في A (أي بمعنى آخر $U-A$). ونرمز لمتممة A بالرمز $\overline{A}$ وتكون:

$$\overline{A}=U-A=\{x : x\in U \text{ و } x\notin A\}$$

وتمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$\overline{A}$

مثال٦: لتكن المجموعتان: $A=\{1,2,3\}$　$U=N=\{1,2,3,4.....\}$ إذن: $\overline{A}=\{4,5,6.....\}$

خصائص المتممة:

1) $\overline{A}\bigcup A=U$　　2) $\overline{A}\bigcap A=\phi$　　3) $\overline{\phi}=U$

4) $\overline{U}=\phi$　　5) $\overline{\overline{A}}=A$　　6) $A\subseteq B \Rightarrow \overline{A}\subseteq B$

قانون ديمورغان

لتكن A و B مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U عندئذ يتحقق التالي:

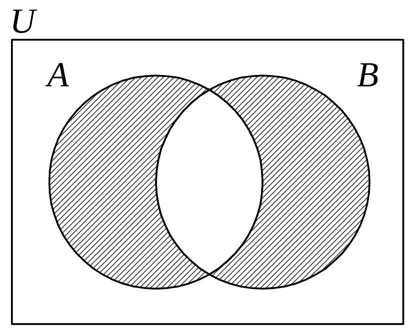
$a)\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\qquad b)\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

الفرق التناظري بين مجموعتين

نُعرِّف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة قي اتحاد المجموعتين و في نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع. ونرمز لهذا الفرق التناظري بالرمز $A\oplus B$

$$A\oplus B=\{x: x\in A\cup B \text{ و } x\notin A\cap B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A\oplus B$

مثال ٧: لتكن المجموعتان: $B=\{2,4,a,b\}$ $A=\{2,3,4,5\}$ إذن: $A\oplus B=\{3,5,a,b\}$

خصائص الفرق التناظري:

1) $A\oplus A=\phi$ $\qquad$ 2) $A\oplus\phi=A$ $\qquad$ 3) $A\oplus U=\phi$

4) $A\oplus B=B\oplus A$ $\qquad$ 5) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$ $\qquad$ 6) $A\oplus B=\phi\Leftrightarrow A=B$

تمارين

المجموعات المشار إليها في تمرين ١ إلى ٣ هي المجموعة الشاملة $U=\{1,2,...,9\}$ والمجموعات التالية:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $\quad B=\{4,5,6,7\}$ $\quad C=\{5,6,7,8,9\}$

$D=\{1,3,5,7,9\}$ $\quad E=\{2,4,6,8\}$ $\quad F=\{1,5,9\}$

تمرين ١: أوجد:

$a) A\bigcup B$ و $A\bigcap B$ $\quad b) B\bigcup D$ و $B\bigcap D$ $\quad c) A\bigcup C$ و $A\bigcap C$

$d) D\bigcup E$ و $D\bigcap E$ $\quad e) E\bigcup F$ و $E\bigcap F$ $\quad f) D\bigcup F$ و $D\bigcap F$

تمرين ٢: أوجد:

$a)\overline{A}\,,\overline{B},\overline{C}\,,\overline{D}$ $\quad b) A-B$ $\quad c) B-A$ $\quad d) D-E$

$e) F-D$ $\quad f) A\oplus B$ $\quad g) C\oplus D$ $\quad h) E\oplus F$

تمرين ٣: أوجد:

$a) A\bigcap(B\bigcup E)$ $\quad b)\overline{A-E}$ $\quad c)\overline{A\bigcap D}-B$ $\quad d)(B\bigcap F)\bigcup(C\bigcap E)$

تمرين ٤: اختصر ما يلي:

$a) A\bigcap B\bigcap\overline{A}$ $\quad b)(\overline{A}\bigcup\phi)\bigcup A$ $\quad c)(A\bigcup B)\bigcap\overline{B}$ $\quad d)(A\bigcap B)\bigcup(\overline{A}\bigcap B)$

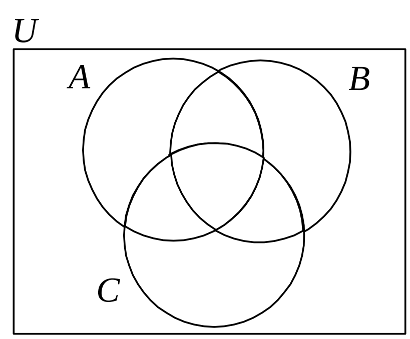
$e)\overline{A\bigcup B}\bigcup\overline{A}\bigcap B$ $\quad f) A\bigcup B\bigcup\overline{A}$ $\quad g)(A\bigcap U)\bigcup\overline{A}$ $\quad e)[(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\overline{B})\bigcup(\overline{A}\bigcap B)]\bigcap B$

تمرين ٥: لتكن A و B مجموعتين باستخدام أشكال فن ظلل $A\bigcap\overline{B}$ و $\overline{B-A}$ في كل من الحالات التالية:

$a) A\bigcap B\neq\phi$ $\quad b) A\bigcap B=\phi$ $\quad c) B\subset A$

تمرين ٦: الرسم التالي يبين ثلاثة مجموعات A,B,C. ظلل التالي:

$a) A-(B\bigcup C)$ $\quad b)\overline{A}\bigcap(B\bigcup C)$ $\quad c)\overline{A}\bigcap(C-B)$



تمرين 7: بَيّن قانون توزيع التقاطع على الاتحاد وقانون ديمورغان باستخدام أشكال فن.

تمرين 8: بَيّن أن: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

تمرين 9: مع العلم أن $A - B = A \cap \overline{B}$ أ أن:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

٣. التقابل بين العمليات على المجموعات والعمليات المنطقية :

هناك تقابل بين العمليات على المجموعات والعمليات المنطقية يمكن تلخيصه في الجدول التالي:

مجموعة	تعبير منطقي
الإتحاد	التخيير
التقاطع	العطف
المتممة	النفي
الفرق التناظري	التخيير الاستثنائي
المجموعة الشاملة	التوافق
المجموعة الخالية	التناقض
المساواة	التكافؤ المنطقي
المجموعة الجزئية	العبارة المشروطة

٤. مجموعات الأعداد

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها وقد سبق للمتدرب دراستها في مراحل التعليم العام وفيما يلي تذكير وتأصيل هذه المجموعات.

مجموعة الأعداد الطبيعية

وهي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N :

$$N = \{1, 2, 3, 4 ....\}$$

مجموعة الأعداد الكلية

وما هي إلا مجموعة الأعداد الطبيعية N مضافا إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W. وبمعنى آخر $W = N \cup \{0\}$ وتصبح:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة

بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعة W نحصل على مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بالحرف Z ، إذا:

$$Z = \{.......-2,-1,0,1,2.......\}$$

مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية

وهي المجموعة التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط أن لا يساوي المقام فيها الصفر ونرمز لها بالحرف Q. وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z , n \in Z , n \neq 0 \right\}$$

نلاحظ هنا أن أي عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر بحيث يكون المقام في هذا الكسر العدد ١ ، فمثلا $-2 = \frac{-2}{1}$ وبشكل أعم $m = \frac{m}{1}$.

عند هذه النقطة نلاحظ أن N مجموعة جزئية من W و W مجموعة جزئية من Z و Z مجموعة جزئية من Q ، أي باستخدام رمز الاحتواء لدينا: $N \subset W \subset Z \subset Q$

مجموعة الأعداد الحقيقية:

مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز R تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية بالإضافة إلى الأعداد غيرالنسبية. وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الطريقة التي عرفنا بها المجموعة Q سابقا مثل $\sqrt{2}$ و π .

تمارين

تمرين١: عبّر عما يلي باستخدام المجموعات:

$$1)\ \neg p \qquad 2)\ p \wedge q \qquad 3)\ p \vee q \qquad 4)\ q \vee \neg p \qquad 5)\ (p \wedge q) \wedge \neg (p \vee q)$$

تمرين٢: عبّر عما يلي باستخدام العمليات المنطقية:

$$1)\ A \cap \overline{B} \qquad 2)\ \overline{(A \cup B)} \cap C \qquad 3)\ A = B \oplus C \qquad 4)\ \overline{A} \cup B \subset C$$

تمرين٣: صنف الأعداد التالية حسب مجموعاتها العددية:

$$1)\ 2 \qquad 2)\ 0 \qquad 3)\ -\frac{4}{2} \qquad 4)\ \pi \qquad 5)\ e^2$$

الفصل الثاني: الدوال

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.

ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

وقد سبق أن درس المتدرب مفهوم الدالة ومنحناها في المقرر ١٨١ ريض ولهذا سنبدأ هذا الفصل بمراجعة سريعة لذلك من خلال تمارين، ثم نضيف بعض الفقرات المفيدة.

١. مراجعة:

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y . .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

تعريف٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

تعريف٣: تكون دالتان f و g متساويتان إذا تحقق ما يلي:

$$1)\ D_f = D_g$$
$$2)\ x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

تعريف٤: نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تطبيق إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، أي أن مجالها هو مجموعة المنطلق: $D_f = X$.

نظرية١: إذا كانت $f : X \to Y$ دالة فإن $f : D_f \to Y$ تطبيق.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تطبيق باستبدال مجموعة المنطلق بمجال الدالة (أي أننا نحذف من مجموعة المنطلق العناصر التي ليس لها صورة في مجموعة الوصول).

تعريف٥: نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تباين (أو تطبيق متباين) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل صورة لها أصل واحد، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة فإن: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ و $D_f = X$.

تعريف٦: نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تغامر (أو تطبيق غامر) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة الوصول له أصل واحد على الأقل، أي أن: $R_f = Y$ و $D_f = X$.

نظرية٢: إذا كانت $f : X \to Y$ دالة فإن $f : D_f \to R_f$ تغامر.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تغامر بحذف العناصر التي ليس لها صورة من مجموعة المنطلق والعناصر التي ليس لها أصل من مجموعة الوصول.

.**تعريف٧:** نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تقابل (أو تطبيق متقابل) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط ولكل عنصر من مجموعة الوصول أصل واحد فقط، أي أن الدالة تباين وتغامر في آن واحد.

خلاصة: تكون علاقة f من X إلى Y :

١) دالة إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٢) تطبيقا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$

٣) تباينا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$
و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٤) تغامرا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f = X$
و $R_f = Y$

٥) تقابلا إذا تحقق ما يلي: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $D_f = X$

و $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

و $R_f = Y$

تعريف٨: لتكن لدينا الدالتان $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$

تركيب هاتين الدالتين $g \circ f$ هو دالة من X إلى Z بحيث: $g \circ f(x) = g[f(x)]$

نظرية٣: تركيب الدوال تجميعي ولكن ليس تبديليا.

تعريف٩: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

منحنى الدالة:

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) انشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x, y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة...

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

تعريف١٠: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x) = f(x)$ أو $f(-x) - f(x) = 0$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

الدوال الجبرية:

تعريف١١: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.(المطولة)

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

الدوال غير الجبرية:

أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

تمارين

تمرين١: بَيّن بأن كلا من العلاقات التالية دوال:

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

تمرين٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها:

تمرين٣: حدد نوع كل دالة مما يلي (تطبيق، تباين، تغامر، تقابل):

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

$$5)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{x^3+1}{x^2} \qquad 6)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+1}$$

تمرين٤: احسب تركيب $g\circ f$ و $f\circ g$ في كل مما يلي:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x} \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^x \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1 \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

$$4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x| \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

تمرين٥: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\ln 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين٦: صنف كلا من الدوال السابقة في التمارين ١ إلى ٥ (من بين الدوال العددية المشهورة):

تمرين٧: مثل كلا من الدوال التالية:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\ln 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين٨: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_3 10 \qquad 2)\ \log_2 16 \qquad 3)\ \log_{10} 360=\log 360 \qquad 4)\ \log_{\sqrt{2}} 50$$

٢. بعض الدوال العددية الهامة في الحاسب:

دالة الجزء الصحيح الأصغر: ويرمز لها بالرمز: $\lfloor\ \rfloor$ وهي معرفة كما يلي: $\lfloor\ \rfloor : \mathrm{R} \to \mathrm{Z}$ حيث: $\lfloor x \rfloor$ هو أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x .

مثال١:

$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \quad \lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2, \quad \lfloor -8.5 \rfloor = -9, \quad \lfloor 7 \rfloor = 7, \quad \lfloor -4 \rfloor = -4$$

دالة الجزء الصحيح الأكبر: ويرمز لها بالرمز: $\lceil\ \rceil$ وهي معرفة كما يلي: $\lceil\ \rceil : \mathrm{R} \to \mathrm{Z}$ حيث: $\lceil x \rceil$ هو أصغر عدد صحيح لا يقل عن x .

مثال٢:

$$\lceil 3.14 \rceil = 4, \quad \lceil \sqrt{5} \rceil = 3, \quad \lceil -8.5 \rceil = -8, \quad \lceil 7 \rceil = 7, \quad \lceil -4 \rceil = -4$$

دالة الجزء الصحيح: ويرمز لها بالرمز: INT وهي معرفة كما يلي: $\mathrm{INT} : \mathrm{R} \to \mathrm{Z}$ حيث: $\mathrm{INT}(x)$ هو الجزء الصحيح لـ x .

مثال٣:

$$\mathrm{INT}(3.14) = 3, \quad \mathrm{INT}(\sqrt{5}) = 2, \quad \mathrm{INT}(-8.5) = -8, \quad \mathrm{INT}(7) = 7, \quad \mathrm{INT}(-4) = -4$$

دالة القيمة المطلقة: ويرمز لها بالرمز: $|\ |$ وهي معرفة كما يلي: $|\ | : \mathrm{R} \to [0, \infty)$ حيث: $|x|$ هو قيمة x دون إشارته..

مثال٤:

$$|3.14| = 3.14, \quad |\sqrt{5}| = \sqrt{5}, \quad |-8.5| = 8.5, \quad |7| = 7, \quad |-4| = 4$$

دالة باقي القسمة: ليكن لدينا عدد طبيعي m وعدد صحيح k . نعرف $k \ (\mathrm{mod}\ m)$ ونقرأ k تردد m على أنه عدد طبيعي هو باقي قسمة k على m .

مثال٥: باقي القسمة محصور دوما بين 0 و $m-1$:

$$25 \ (\mathrm{mod}\ 7) = 4, \quad 25 \ (\mathrm{mod}\ 5) = 0, \quad 35 \ (\mathrm{mod}\ 11) = 2, \quad 3 \ (\mathrm{mod}\ 8) = 3,$$
$$-26 \ (\mathrm{mod}\ 7) = 2, \quad -371 \ (\mathrm{mod}\ 8) = 5, \quad -39 \ (\mathrm{mod}\ 3) = 0, \quad -3 \ (\mathrm{mod}\ 8) = 5$$

مثال٦: الساعة عبارة عن تطبيق لدالة باقي القسمة على ١٢ أو ٢٤.

$$10 + 20 \ (\mathrm{mod}\ 24) = 6$$

أي أنه إذا كانت الساعة الآن العاشرة صباحا فستكون السادسة صباحا بعد عشرين ساعة.

تمارين

تمرين١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \lfloor 15.23 \rfloor,\quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor,\quad \lfloor -\pi \rfloor,\quad \lfloor 27 \rfloor,\quad \lfloor -4.1 \rfloor$$

$$2)\ \lceil 15.23 \rceil,\quad \lceil \sqrt{2} \rceil,\quad \lceil -\pi \rceil,\quad \lceil 27 \rceil,\quad \lceil -4.1 \rceil$$

$$3)\ \mathrm{INT}(15.23),\quad \mathrm{INT}(\sqrt{2}),\quad \mathrm{INT}(-\pi),\quad \mathrm{INT}(27),\quad \mathrm{INT}(-4.1)$$

$$4)\ |15.23|,\quad |\sqrt{2}|,\quad |-\pi|,\quad |27|,\quad |-4.1|$$

تمرين٢: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 13 \pmod{24},\quad 13 \pmod{12},\quad 31 \pmod{11},\quad 31 \pmod{32},$$

$$2)\ -13 \pmod{24},\quad -13 \pmod{12},\quad -31 \pmod{11},\quad -31 \pmod{32}$$

تمرين٣: إذا كانت الساعة الآن الثامنة مساءً، فكم ستكون بعد:

١) ٢٠ ساعة؟ ٢) ٣١ ساعة؟ ٣) ٥ ساعة؟

وكم كانت قبل:

٤) ١٥ ساعة؟ ٥) ٢١ ساعة؟ ٦) ٤٣ ساعات؟

الفصل الثالث: الخوارزميات

الخوارزميات هي أساس البرمجة في الحاسب. وسنتناول نبذة مختصرة عنها.

١. تعريف الخوارزمية:

تعريف١: نسمي مسألة كل قائمة منتهية من المعطيات وسؤال متعلق بها. وحل المسألة هو إعطاء جواب لسؤالها مهما تغيرت قيم المعطيات.

مثال١: نريد أن نحسب قيمة كثير الحدود التالي من أجل $x = 5$:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15$$

فالمعطيات هنا هي: كثير الحدود $f(x)$ والقيمة المعينة للمتغير $x = 5$ ، والسؤال هو: أوجد قيمة $f(5)$.

وحل هذه المسألة هو: $f(5) = 80$.

تعريف٢: نسمي حجم معطيات المسألة حجم الحيز الذي تشغله المعطيات في الذاكرة.

مثال٢: نعتبر المسألة السابقة. المعطيات هنا ثابتة فلا نحتاج إلى تخزينها في الذاكرة.

ولكن لو اعتبرنا مسألة أعم منها وهي حساب قيمة كثير الحدود نفسه من أجل أية قيمة ما للمتغير فنحتاج إلى إدخال قيمة المتغير كمتغير حقيقي. وسيكون الحيز الذي يخصص في الذاكرة لتخزين هذا المتغير الحقيقي هو حجم المعطيات.

مثال٣: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة الثالثة وقيمة معينة للمتغير $x = a$.

السؤال: أوجد قيمة $f(a)$.

فيجب إدخال معاملات كثير الحدود من أصغر درجة إلى أكبرها وهذا يحتاج إلى مصفوفة 1×4 (مثلا) كما أننا نحتاج إلى متغير حقيقي لإدخال قيمة المتغير. فحجم المعطيات سيكون بهذا الترميز هو الحيز الذي تشغله المصفوفة والمتغير الحقيقي.

تعريف٣: نسمي خوارزمية كل قائمة منتهية من الخطوات لحل مسألة ما أي إيجاد جواب للمسألة.

يمكن أن نتصور الخوارزمية كبرنامج حاسب لحل مسألة ما.

مثال٤: نعتبر مسألة المثال ١: يمكن حلها بطريقة التعويض التالية:

$$\begin{aligned} f(5) &= 2(5^3) - 7(5^2) + 4(5) - 15 = (2 \times 5 \times 5 \times 5) - (7 \times 5 \times 5) + (4 \times 5) - 15 \\ &= 250 - 175 + 20 - 15 = 75 + 20 - 15 = 95 - 15 = 80 \end{aligned}$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلى أداء $3 + 2 + 1 = 6$ عمليات ضرب و 3 عمليات جمع.

كما يمكن حلها بطريقة هورنير التالية:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15 = (2x^2 - 7x + 4)x - 15 = ((2x - 7)x + 4)x - 15$$

ومنه فيكون:

$$f(5) = ((2\times5-7)\times5+4)\times5-15 = ((10-7)\times5+4)\times5-15 = (3\times5+4)\times5-15$$
$$= (15+4)\times5-15 = 19\times5-15 = 95-15 = 80$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلى أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع.

إذن خوارزمية هورنير أسرع من خوارزمية التعويض.من حيث الوقت المستغرق لإعطاء الجواب.

تجدر الإشارة إلى أن التحليل المعطى لكثير الحدود في طريقة هورنير ليس جزءا من الجواب وإنما يوضح صحة الطريقة فقط إذ يمكن تطبيقها مباشرة كالتالي:

الخطوة الأولى: ضرب معامل x^3 في قيمة المتغير.

الخطوة الثانية: إضافة الناتج السابق إلى معامل x^2 .

الخطوة الثالثة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة الرابعة: إضافة الناتج السابق إلى معامل x .

الخطوة الخامسة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة السادسة: إضافة الناتج السابق إلى المعامل الثابت .

الجواب: الناتج الأخير هو قيمة كثير الحدود عند قيمة المتغير.

فواضح من خطوات الخوارزمية بأننا نحتاج إلى أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع .فقط.

وهذه الخوارزمية يمكن تطبيقها لحل مسألة المثال ٣.

مثال ٥: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: عددان طبيعيان a و b بحيث $a > b$.

السؤال: ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقتين مختلفتين:

١) الطريقة المباشرة: نطبق الخوارزمية التالية:

الخطوة الأولى: إيجاد قواسم كل من العددين.

الخطوة الثانية: إيجاد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a = 258$ و $b = 60$ فيكون:

الخطوة الأولى: قواسم $a = 258$ هي: $1, \ 2, \ 3, \ 6, \ 86, \ 129, \ 258$

وقواسم $b = 60$ هي: $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 10, \ 12, \ 15, \ 20, \ 30, \ 60$.

الخطوة الثانية: القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 258$ و $b = 60$ هو: 6 .

٢) الطريقة الثانية: نطبق خوارزمية إقليدس التالية:

الخطوة الأولى: نقسم a على b فنحصل على باقي r_1 .

الخطوة الثانية: إذا كان الباقي يساوي الصفر فإن القاسم المشترك الأكبر هوالمقسوم عليه.

الخطوة الثالثة: إذا لم يكن الباقي يساوي الصفر فنقسم المقسوم عليه على الباقي فنتحصل على باق جديد.

الخطوة الرابعة: نكرر الخطوتين الثانية والثالثة إلى أن نجد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a = 258$ و $b = 60$ فيكون:

الخطوة الأولى: نقسم $a = 258$ على $b = 60$ فنتحصل على الباقي: $r_1 = 18$.

الخطوة الثالثة: نقسم $b = 60$ على $r_1 = 18$ فنتحصل على الباقي: $r_2 = 6$.

الخطوة الرابعة: نقسم $r_1 = 18$ على $r_2 = 6$ فنتحصل على الباقي: $r_3 = 0$.

الخطوة الثانية: الباقي يساوي الصفر إذن القاسم المشترك الأكبر هو المقسوم عليه الأخير: $r_2 = 6$.

هذه الخوارزمية منتهية لأن الباقي يتناقص إلى أن يصبح صفرا:

$$a = 258 > b = 60 > r_1 = 18 > r_2 = 6 > r_3 = 0$$

٢. تعقد الخوارزمية:

إن تحليل الخوارزميات مهمة رئيسية في علوم الحاسب.. ولمقارنة الخوارزميات يمكن اعتبار عاملين مهمين هما: الفضاء والزمن.

نعني بالفضاء الحيز الذي تشتغله الخوارزمية في الذاكرة فكلما كان صغيرا كلما كان أحسن، رغم أن هذا العامل ليس هو الأهم.

ونعني بالزمن الوقت الذي تستغرقه الخوارزمية لحل المسألة المطروحة فكلما كان الوقت أقصر كلما كانت الخوارزمية أكثر فعالية. وهذا العامل يكاد أن يكون هو الأساسي.

تعريف٤: نسمي تعقد خوارزمية ما عدد العمليات الأساسية التي نؤديها في تنفيذ الخوارزمية وفي أسوأ حالة وذلك بدلالة حجم المعطيات. ومن العمليات الأساسية: المقارنة والمساواة والجمع والطرح والضرب والقسمة.

مثال٦: نعتبر مسألة المثال ٣ ونعتبر خوارزمية التعويض لحلها والموضحة في المثال ٤. ما هو تعقد هذه الخوارزمية؟

الحل:

نحتاج في هذه الخوارزمية إلى أداء $6 = 1 + 2 + 3$ عمليات ضرب و 3 عمليات جمع، أي أن تعقد الخوارزمية هو: ٩ عمليات أساسية.

بينما تعقد خوارزمية هورنير هو: ٦ عمليات أساسية.

مثال ٧: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة n وعدد حقيقي a .

السؤال: احسب $f(a)$.

ما هو تعقد خوارزمية التعويض لحل هذه المسألة؟ وما هو تعقد خوارزمية هورنير؟

الحل:

١) في خوارزمية التعويض نحتاج إلى أداء $n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ عملية ضرب و n عملية جمع أي أن التعقد هو: $\dfrac{n(n+1)}{2}+n=\dfrac{n^2+n}{2}+n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$ عملية أساسية.

٢) في خوارزمية هورنير نحتاج إلى أداء n عملية ضرب و n عملية جمع أي أن التعقد هو: $n+n=2n$ عملية أساسية.

ومنه فيمكن أن نقول بأن خوارزمية هورنير أحسن من خوارزمية التعويض.

نسبة التزايد والرمز O الكبير:

لما نقوم بحساب تعقد خوارزمية معينة فإننا لانحتاج إلى كل التفاصيل ولكن يكفي أن نعرف الحد المهيمن في هذا التعقد. وذلك لأننا نريد أن نعرف نسبة التزايد لما يزيد حجم المعطيات. وهذه قيم تقريبية لنسب تزايد بعض الدوال المشهورة:

n	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	2^n
٥	٣	٥	١٥	٢٥	١٢٥	٣٢
١٠	٤	١٠	٤٠	١٠٠	10^3	10^3
١٠٠	٧	١٠٠	٧٠٠	10^4	10^6	10^{30}
١٠٠٠	١٠	10^3	10^4	10^6	10^9	10^{300}

وللتعبير عن الحد المهيمن في التعقد نستخدم الرمز O .

مثال ٨: تعقد خوارزمية التعويض هو: $O(n^2)$ ، بينما خوارزمية هورنير تعقدها هو: $O(n)$.

أي أن نسبة تزايد التعقد بدلالة حجم المعطيات هي من جنس تزايد الدالة المشار إليها.

وبهذه الطريقة، سنعرف مسبقا الخوارزميات التي ستستغرق وقتا معقولا والتي ستستغرق وقتا طويلا جدا وبالتالي فلا فائدة عملية من تنفيذها.

٣. بعض الخوارزميات المشهورة:

البحث الخطي:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عنصر و $ITEM$: قيمة معينة

السؤال: هل $ITEM$ موجود في $DATA$ وإذا كان نعم فما هو موقعه؟

الخوارزمية: سنجد LOC موقع $ITEM$ في $DATA$ أو نرسل رسالة عدم وجوده.

الخطوة الأولى: نقارن عناصر $DATA$ مع $ITEM$ واحدا واحدا فإن وجدنا عنصرا مساويا له سجلنا موقعه في LOC .

الخطوة الثانية: نرسل رسالة عدم وجود القيمة المطلوبة. إذا لم ننجح في الخطوة الأولى.

تعقد الخوارزمية: في أسوأ حالة، نحتاج في هذه الخوارزمية إلى أداء n مقارنة ومساواة واحدة. إذن تعقد الخوارزمية هو: $O(n)$.

مثال٩: طبق البحث الخطي على المعطيات التالية:

$$DATA = (0,-2,3,15,-7) \qquad ITEM = 15$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيمة ابتدائية للمتغير $LOC = 1$ ونقوم بالمقارنات التالية:

15 مع 0 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC = 2$ ؛

15 مع -2 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC = 3$ ؛

15 مع 3 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC = 4$ ؛

15 مع 15 : متساويان إذن العنصر موجود وموقعه هو: $LOC = 4$.

البحث الثنائي:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عنصر مرتبة من أصغرها إلى أكبرها و $ITEM$: قيمة معينة

السؤال: هل $ITEM$ موجود في $DATA$ وإذا كان نعم فما هو موقعه؟

الخوارزمية: تعتمد الخوارزمية على مبدأ "فرّق تسد" كالتالي:

الخطوة الأولى: نقارن العنصر ذا الموقع الوسط $\frac{n+1}{2}$ (إذا كان n فرديا) أو $\frac{n}{2}$ (إذا كان n زوجيا) مع $ITEM$:

إذا كان $ITEM$ يساويه فنتوقف

إذا كان $ITEM$ أكبر منه فنبحث عن $ITEM$ في النصف العلوي المتبقي

إذا كان $ITEM$ أصغر منه فنبحث عن $ITEM$ في النصف السفلي المتبقي

الخطوة الثانية: نكرر الخطوة الأولى بتطبيقها على النصف المتبقي من المصفوفة أي أننا نقارن $ITEM$ مع العنصر ذي الموقع $\frac{high+low+1}{2}$ أو $\frac{high+low}{2}$ (بحسب المجموع فردي أم زوجي) وحيث: $high$ هو موقع أكبر عنصر في المتبقي، وlow هو موقع أصغر عنصر في المتبقي..

الخطوة الثالثة: إذا لم نجد $ITEM$ فنرسل رسالة عدم وجوده.

تعقد الخوارزمية: $O(\log_2 n)$.

مثال١٠: طبق البحث الثنائي على المعطيات التالية:

$$DATA = (-3,-1,0,4.5,5,10,16) \qquad ITEM = 15$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيمة ابتدائية للمتغيرات $LOC = \frac{7+1}{2} = 4, high = 7, low = 1$ ونقوم بالمقارنة التالية:

15 مع 4.5 : $15 > 4.5$ فننتقل إلى النصف العلوي المتبقي: $LOC = 6, high = 7, low = 5$ ؛

الخطوة الثانية: نقوم بالمقارنات:

15 مع 10 : $15 > 10$ فننتقل إلى النصف العلوي المتبقي: $LOC = 7, high = 7, low = 7$ ؛

15 مع 16 : $15 < 16$ فنتوقف لأنه لم يتبقى شيء غير مفحوص.

الخطوة الثالثة: 15 غير موجود في $DATA$.

الترتيب البالوني:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عدد.

السؤال: رتب عناصر $DATA$ من أصغر عنصر إلى أكبرها.

الخوارزمية: نبحث عن أصغر عنصر ونبادله بأول عنصر، ثم نبحث عن العنصر الذي يليه ونبادله بثاني عنصر وهكذا إلى أكبر عنصر.

تعقد الخوارزمية: في أسوأ حالة، نحتاج لتثبيت أصغر عنصر إلى $n-1$ مقارنة و $3(n-1)$ مساواة أي $4(n-1)$ عملية أساسية.

ولتثبيت العنصر الذي يليه، نحتاج إلى $4(n-2)$ عملية أساسية. وهكذا سنحتاج في الإجمال إلى:

$$4(n-1) + 4(n-2) + \cdots + 4(1) = 4\frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1) = 2n^2 - 2n = O(n^2)$$

مثال١١: طبق الترتيب البالوني على المعطيات التالية:

$$DATA = (16,12,21,-5,-3,11,8)$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيم ابتدائية للمتغيرات:

$$currentMinimum = 16, currentMinLocation = 1, currentLevel = 1$$

ونبحث عن أصغر عنصر:

$DATA$	$currentMinimum$	$currentMinLocation$
12	12	2
21	12	2
-5	-5	4
-3	-3	5
11	-3	5
8	-3	5

إذن أصغر عنصر في هذا المستوى هو: -3 وموقعه هو: 5

نبادل هذا العنصر بالعنصر الأول من هذا المستوى فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$DATA = (-3,12,21,-5,16,11,8)$$

الخطوة الثانية: نعطي قيم ابتدائية للمتغيرات:

$$currentMinimum = 12, currentMinLocation = 2, currentLevel = 2$$

ونبحث عن أصغر عنصر في هذا المستوى:

$DATA$	$currentMinimum$	$currentMinLocation$
21	12	2
-5	-5	4
16	-5	4
11	-5	4
8	-5	4

إذن أصغر عنصر في هذا المستوى هو: -5 وموقعه هو: 4

نبادل هذا العنصر بالعنصر الأول من هذا المستوى وهو العنصر الثاني فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$DATA = (-3,-5,21,12,16,11,8)$$

وهكذا إلى أن تصبح المصفوفة كما يلي:

$$DATA = (-3,-5,8,11,12,16,21)$$

تمارين

تمرين١: طبق البحث الخطي على المعطيات التالية:

$$1)\ DATA = (0,89,63,13,5) \qquad ITEM = 63$$
$$2)\ DATA = (0,89,63,13,5) \qquad ITEM = 13$$
$$3)\ DATA = (0,19,18,23,4) \qquad ITEM = 4$$
$$4)\ DATA = (19,-8,7,1) \qquad ITEM = 7$$

تمرين٢: طبق البحث الثنائي على المعطيات السابقة بعد ترتيب المصفوفات المعطاة.

تمرين٣: طبق الترتيب البالوني على المصفوفات المعطاة في التمرين ١.

تمرين٤: لتكن لدينا اللعبة التالية بين شخصين:

يختار الشخص الأول رقما طبيعيا بين ١ و ١٠٠ ويكتبه على ورقة دون علم الشخص الثاني.

يقترح الشخص الثاني رقما بين ١ و ١٠٠.

يجيب الشخص الأول بأحد الأجوبة التالية: ١) وجدت الرقم ٢) الرقم المقترح صغير ٣) الرقم المقترح كبير.

١) اعط خوارزمية للشخص الثاني لإنهاء اللعبة.

٢) ما هو أقصى عدد من المحاولات يحتاج إليها الشخص الثاني لإنهاء اللعبة؟

تمرين٥: عبر عما يلي باستخدام رمز O الكبير:

$$1)\ \log 2n \qquad 2)\ n+1 \qquad 3)\ n^2-3n+2 \qquad 4)\ 1-\log_2 n$$
$$5)\ 2^{n+1} \qquad 6)\ n^2+2^n \qquad 7)\ n^2+\log_2 n \qquad 8)\ (2n+1)\log_2 n$$

تمرين٦: ١) اعط خوارزمية لإيجاد أصغر عنصر في مصفوفة متكونة من n عدد..

٢) حدد تعقد الخوارزمية.

المراجع

١) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ -١٩٨٣م.

2) Alfred Aho, John Hopcroft and Jeffrey Ullman, Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison Wesley, Reading, England, 1974.

3) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

4) Micheal Garey and David Johnson, Computer and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.

5) C. L. Lui, Elements of Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1977.

6) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

7) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

8) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS

BAE SYSTEMS